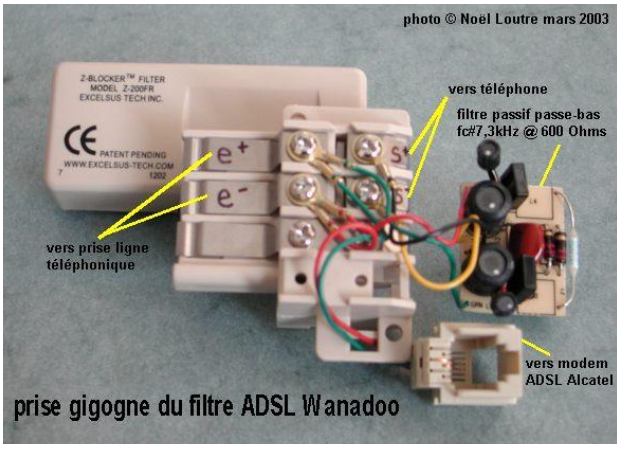
Chapitre 8
Filtrage linéaire

I. Filtre linéaire
1. Représentation d'un filtre
2. Caractéristiques d'un filtre
3. Représentation graphique : diagramme de Bode
4. Les différents types de filtre

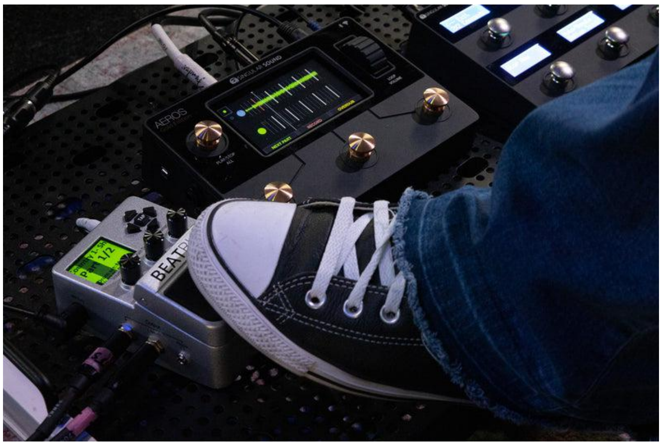
II. Exemple d'un filtre passe-bas du 1er ordre : le filtre RC
1. Etude théorique
   - 1.1. Nature du filtre
   - 1.2. Fonction de transfert
   - 1.3. Pulsation de coupure
2. Diagramme de Bode
   - 2.1 Tracé
   - 2.2 Diagramme de Bode asymptotique

III. Etude d'un filtre passe bande du 2ème ordre : RLC
1. Etude théorique
   - 1.1 Nature du filtre
   - 1.2 Fonction de transfert
2. Diagramme de Bode
   - 2.1 Tracé
   - 2.2 Diagramme de Bode asymptotique

IV. Filtrage d'un signal périodique quelconque
1. Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique
2. Spectre d'un signal périodique
3. Intérêt d'une décomposition harmonique
4. Utilisation d'un diagramme de Bode : réponse d'un filtre linéaire à une fonction périodique
   - 4.1 Etude rapide
   - 4.2 Etude précise



Filtre ADSL



Pédale wah wah

Le cours

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale. Nous avons vu que l'amplitude de la réponse dépendait de la pulsation de l'excitation. Ainsi, certaines fréquences d'entrée ne donnent quasiment aucun signal de sortie, tandis que d'autres fréquences sont correctement restituées voire amplifiées.

Ce phénomène peut être utilisé avec un objectif de filtrage, c'est-à-dire de couper certaines fréquences à l'image d'un filtre optique qui ne laisse passer que certaines couleurs. Par exemple, lorsque l'on écoute la radio, on ne veut garder qu'une seule fréquence et couper les autres.

I. Filtre linéaire

1. Représentation d'un filtre

Un **filtre** est un système réalisant une opération de traitement du signal (amplification, atténuation, déphasage). Il permet notamment de sélectionner des signaux utiles sur un critère fréquentiel.

Un filtre est composé d'un circuit linéaire recevant un signal d'entrée e(t) et délivrant un signal de sortie s(t). La relation définissant le filtre est l'équation différentielle (linéaire à coefficients constants) liant ces 2 signaux.

Puisqu'un filtre effectue un traitement dépendant de la fréquence, il est logique d'envisager l'application de **signaux d'entrée sinusoïdaux du type** $\boldsymbol{e(t) = E_m \cos(\omega t)}$.

En régime sinusoïdal forcé, le signal de sortie évolue également de manière sinusoïdale du temps, avec la même pulsation w que l'excitation : $\boldsymbol{s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)}$

On utilise la représentation complexe d'un signal pour étudier un filtre.

On modélise le filtre par un quadripôle relié à une source en entrée et éventuellement à une charge en sortie.

Un filtre est entièrement caractérisé par sa fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

La fonction de transfert peut se mettre sous la forme $\underline{H} = \dfrac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$, N et D étant des polynômes à coefficients réels. **L'ordre d'un filtre est le degré de D (c'est aussi l'ordre de l'équation différentielle).**

2. Caractéristiques d'un filtre

On peut étudier le gain $G = |\underline{H}|$, rapport des amplitudes en sortie et en entrée, mais on utilise plutôt le gain en décibel.

- Le **gain en décibel est :** $\boldsymbol{G_{dB} = 20\ \log|\underline{H}|}$
- La **phase** du filtre est le déphasage entre la sortie et l'entrée : $\boldsymbol{\varphi = \arg(\underline{H})}$

- **Pulsation de coupure à −3dB :**

Pulsation ω_c pour laquelle :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}, \text{ où } |\underline{H}|_{max} \text{ est le gain maximal du filtre.}$$

Cela correspond à une diminution du gain en décibel de 3 dB par rapport à sa valeur maximale **:**

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3$$

- **Bande passante à −3dB** :

Domaine de fréquences ou de pulsations pour lequel le gain ne diminue pas de plus de 3 dB par rapport à sa valeur maximale :

$$G_{dB,max} - 3 \leq G_{dB} \leq G_{dB,max}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}} \leq |\underline{H}(j\omega)| \leq |\underline{H}|_{max}$$

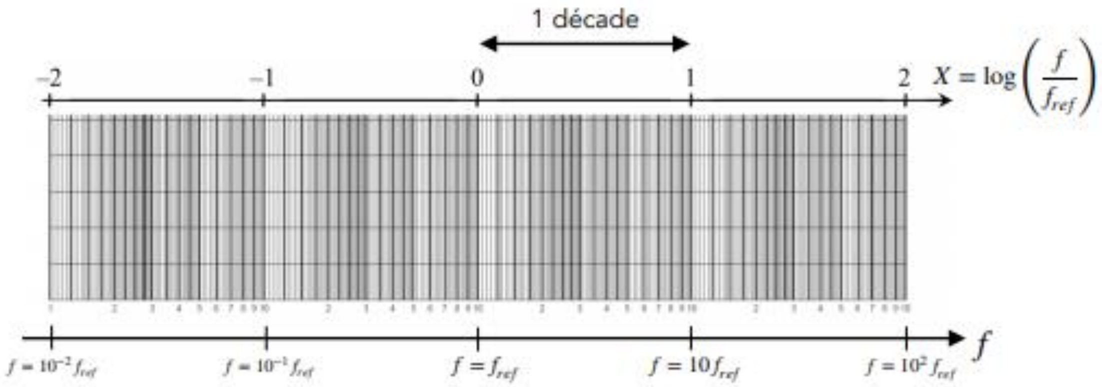
3. Représentation graphique : diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est la représentation d'une fonction de transfert d'un système stable à l'aide de 2 courbes dans une échelle semi-logarithmique :

- **Courbe de réponse en gain :** $G_{dB}(\omega)$, gain en décibel en fonction de la fréquence ou de la pulsation
- **Courbe de réponse en phase :** $\varphi(\omega)$, phase du filtre en fonction de la fréquence ou de la pulsation

Remarque :
Une lecture graphique du gain permet d'obtenir le rapport des amplitudes : $|\underline{H}(j\omega)| = 10^{G_{dB}/20}$
- *G_{dB} = 0 : amplitude en entrée = amplitude en sortie*
- *G_{dB} = -20 : amplitude en sortie = amplitude en entrée/10*
- *G_{dB} = -n20 : amplitude en sortie = amplitude en entrée/10^n*

Echelle logarithmique :



4. Les différents types de filtre

✓ Filtre passe-bas

Il laisse globalement passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. Son gain est maximal pour une pulsation nulle.

Bande passante : $[0,\omega_C]$

Applications :

- *Opérateur valeur moyenne pour transformer un signal périodique en signal continu*
- *Pour le signal audio, le passe-bas atténue les aigües et laisse passer les basses.*

✓ Filtre passe-haut

Il laisse globalement passer les hautes fréquences et atténue les autres. Son gain est maximal pour une pulsation tendant vers l'infini.

Bande passante : $[\omega_C, \infty[$

Applications :

- *Élimination de la composante continue (fréquence nulle) pour centrer un signal autour de 0 (valeur moyenne nulle), application : mode AC d'un oscilloscope*
- *Dans le traitement de l'image, il accentue le contour*
- *Pour le signal audio, c'est un atténuateur de graves et un amplificateur d'aigües.*

✓ Filtre passe-bande

Il ne laisse passer qu'une bande de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse ω_{c1} et une fréquence de coupure haute du filtre ω_{c2}, le domaine $[\omega_{c1},\omega_{c2}]$ est la bande passante du filtre.

Son gain est maximal pour une pulsation dite pulsation de résonance ω_0, qui n'est autre que la pulsation propre du circuit.

Le facteur de qualité décrit la capacité d'un filtre passe bande à sélectionner une fréquence. Il représente le rapport entre la pulsation de résonance et la largeur de la bande passante :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}$$

Ce filtre correspond nécessairement à un circuit d'ordre 2 dont la sortie est aux bornes d'un dipôle où le phénomène de résonance existe quelle que soit la valeur du facteur de qualité.

Applications :

- *Sélectionner une fréquence unique d'un spectre ou une bande de fréquence très étroite (radiocommunication) ;*
- *Transformer un signal périodique de période T en un signal sinusoïdal de période T/n*

Remarques :

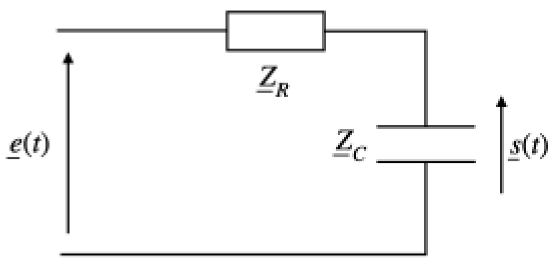
*- A l'opposé, un **filtre réjecteur ou coupe-bande** atténue une plage de fréquences.*
- Les filtres passe-bande et coupe-bande sont au moins du second ordre.

✓ Filtres déphaseurs

Un filtre déphaseur possède un gain constant sur toute la plage de fréquence utilisée, mais la phase varie selon la fréquence.

II. Exemple d'un filtre passe-bas du 1er ordre : le filtre RC

1. Etude théorique



1.1. Nature du filtre

METHODE

On étudie le circuit à très basse fréquence ($\omega \to 0$) et à très haute fréquence ($\omega \to \infty$), en dessinant des schémas équivalents.

- *À très basse fréquence (TBF), une bobine idéale L se comporte comme un fil. À l'inverse, elle se comporte comme un interrupteur ouvert à très haute fréquence (THF).*
- *C'est le contraire avec un condensateur, celui-ci se comporte comme un interrupteur ouvert à TBF et comme un fil à THF.*

Si $\underline{s}(t) = 0$ filtre non passant, si $\underline{s}(t) \neq 0$: filtre passant. On peut ainsi conclure.

✍ ***Déterminer la nature du filtre RC aux bornes de C.***

1.2. Fonction de transfert

On détermine souvent la fonction de transfert avec un pont diviseur de tension.

Déterminer la fonction de transfert du filtre RC.

1.3. Pulsation de coupure

METHODE

On cherche la pulsation telle que $\left|\underline{H}(j\omega_c)\right| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}$ ***(on résout cette équation).***

Pour un passe-bas : $\left|\underline{H}\right|_{max} = \left|\underline{H}\right|(0)$
Pour un passe-haut : $\left|\underline{H}\right|_{max} = \left|\underline{H}\right|(\infty)$
Pour un passe-bande : $\left|\underline{H}\right|_{max} = \left|\underline{H}\right|(\omega_0)$

Déterminer la pulsation de coupure du filtre RC.

De manière générale, la forme canonique d'un filtre passe-bas est :

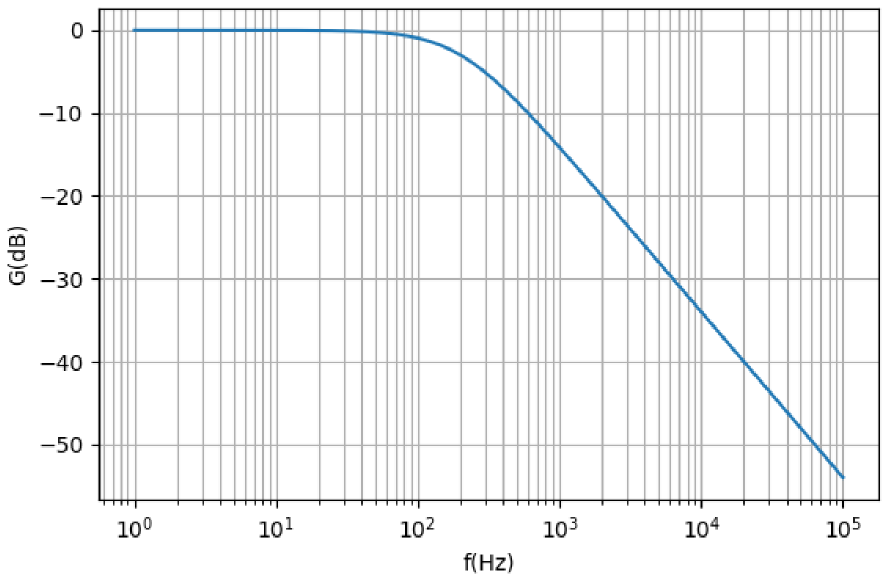
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}}$$

avec ω_C la pulsation de coupure et H_0 le gain statique ($H_0=\underline{H}(0)$)

2. Diagramme de Bode

Déterminer le gain en dB et la phase du filtre RC.

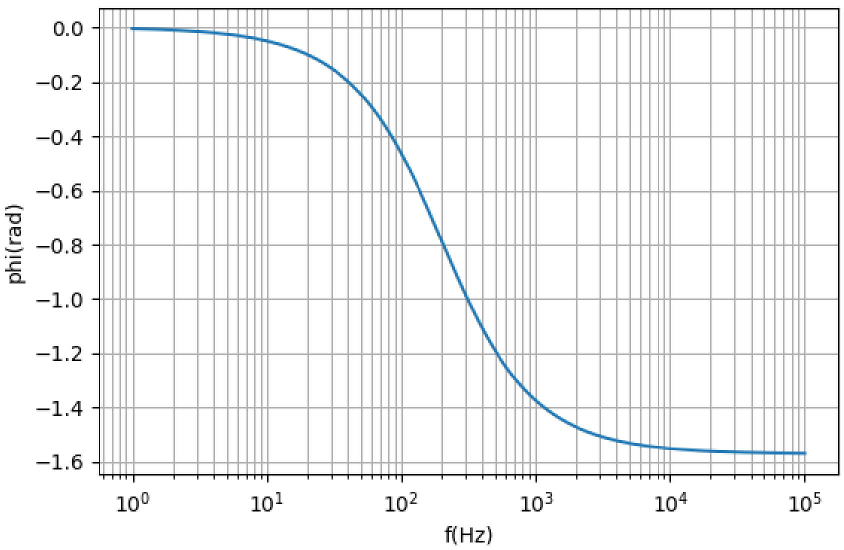
2.1 Tracé



Mesure graphique de la fréquence coupure :

METHODE

On cherche la fréquence ou la pulsation telle que $G_{dB}(\omega_C)=G_{dBmax}-3$.



2.2 Diagramme de Bode asymptotique

METHODE

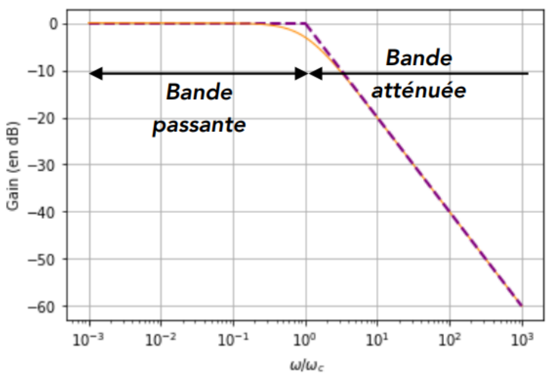
Pour cela, on étudie le comportement à très basse fréquence ($\omega \to 0$) et à très haute fréquence ($\omega \to \infty$) de la fonction de transfert en ne conservant que le terme dominant du numérateur et du dénominateur. On calcule ensuite le gain et la phase pour obtenir les équations des asymptotes.

✍ ***Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode du circuit RC.***

Remarques :

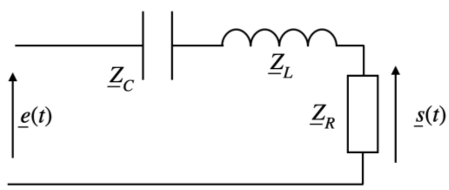
Pour des filtres passe-bas et passe-haut du 1er ordre, la pente des asymptotes obliques sont de $\pm 20\ dB/décade$: loin de la bande passante, si on fait varier la fréquence d'un facteur 10 (une décade), l'amplitude en sortie varie d'un facteur 10 également.

Pour des filtres passe-bas et passe-haut du 1er ordre , l'intersection des asymptotes du gain se fait pour la pulsation de coupure. C'est une autre façon de déterminer graphiquement la pulsation de coupure.



III. Etude d'un filtre passe bande du 2ème ordre : RLC

1. Etude théorique



1.1 Nature du filtre

✍ ***Déterminer la nature du filtre RLC aux bornes de R.***

1.2 Fonction de transfert

✍ ***Déterminer la fonction de transfert du filtre RLC et la mettre sous la forme canonique.*** $\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$***, on donnera les expressions des termes introduit en fonction de R, L et C.***

De manière générale, la forme canonique d'un filtre passe-bande est :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

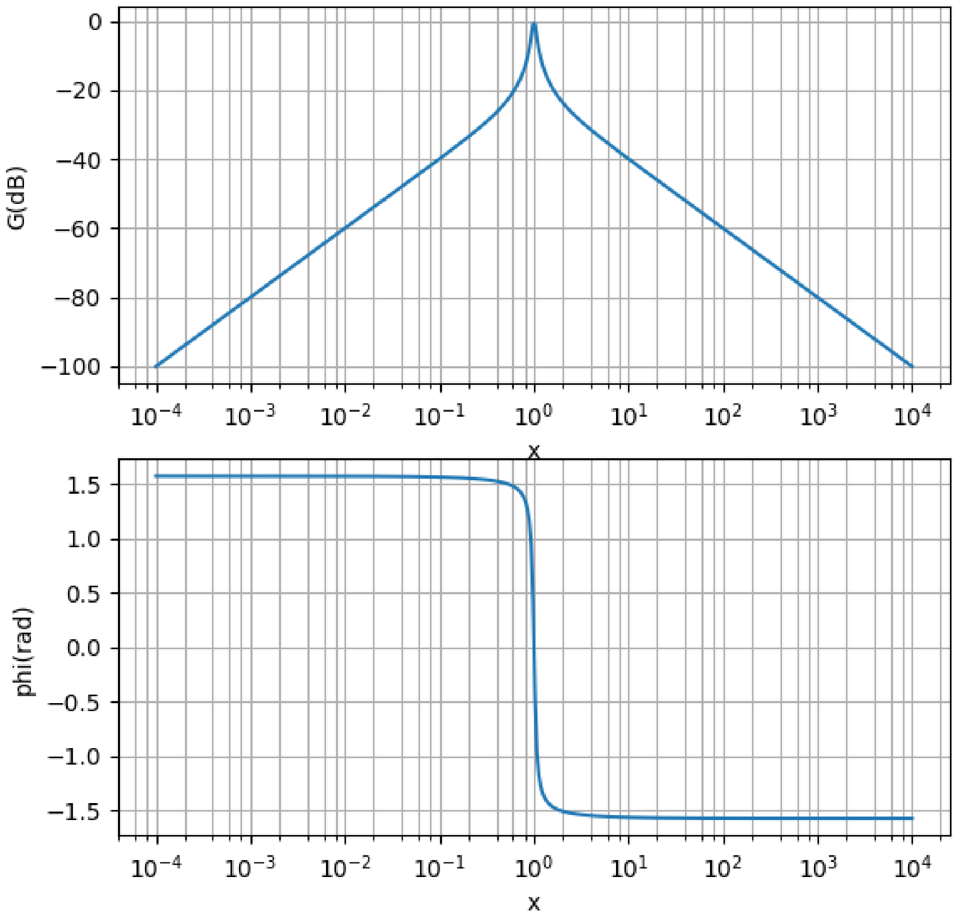
avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur et H_0 le gain maximal, à la résonance ($H_0=\underline{H}(\omega_0)$).

2. Diagramme de Bode

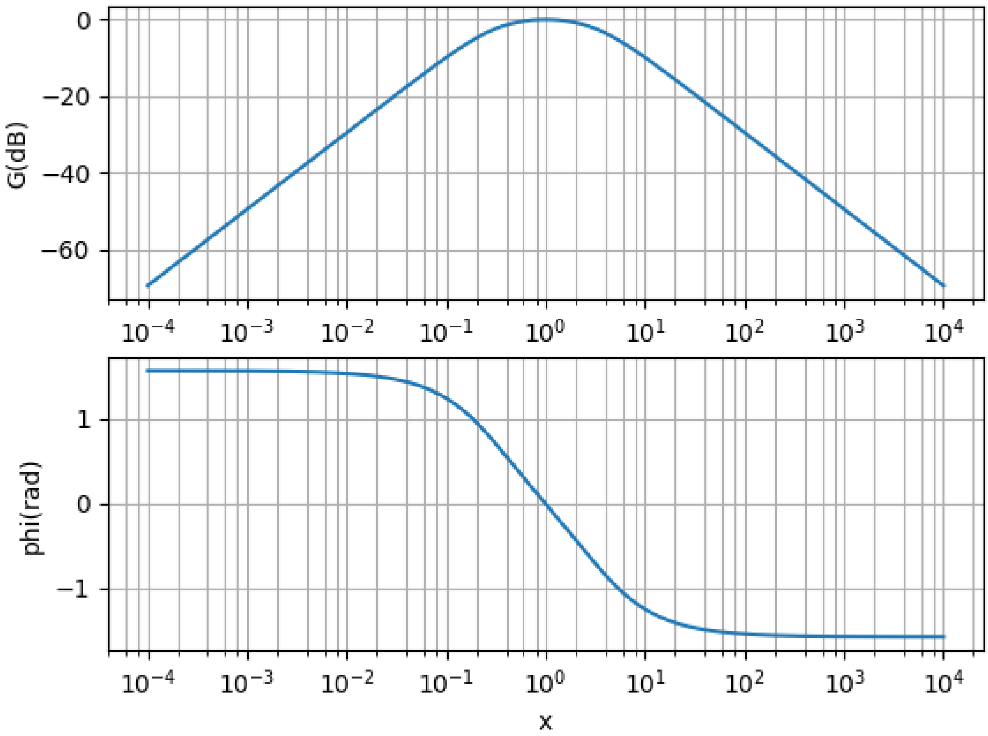
✍ ***Déterminer le gain en dB et la phase du filtre RLC. Donner leurs valeurs à la résonance.***

2.1 Tracé

- Pour Q = 10



- Pour Q = 0.3



Remarque : l'intersection des asymptotes du gain se fait pour la pulsation propre.

2.2 Diagramme de Bode asymptotique

✍ ***Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode du circuit RLC.***

IV. Filtrage d'un signal périodique quelconque

1. Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

L'analyse de Fourier est un outil mathématique très utile pour de nombreux domaines de la physique. Elle consiste en l'ensemble des méthodes qui permettent de **décomposer une fonction périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.**

Un signal s(t) quelconque mais périodique de période T = $\frac{1}{f}$ = $\frac{2\pi}{\omega}$ est décomposable en une somme infinie de fonctions sinusoïdales de fréquences f_n multiples de f :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n cos\,(2\pi n f t + \varphi_n)$$

- **C_0 est l'amplitude de la composante continue : c'est la valeur moyenne du signal**
- **$C_1 cos\,(2\pi f t + \varphi_1)$ est le terme de même fréquence que le signal lui-même : c'est la composante fondamentale du signal.**

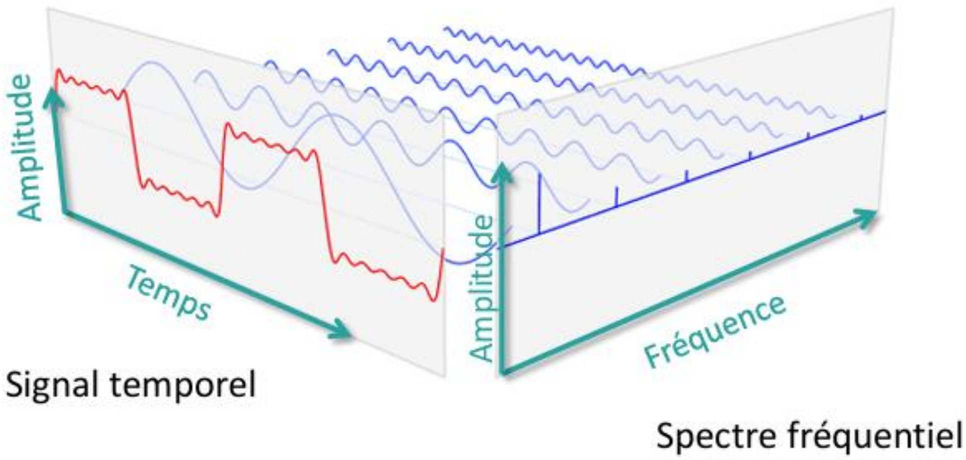
- **Plus généralement, les termes $C_n\,cos(n2\pi f t + \varphi_n)$ sont les harmoniques de rang n, C_n et φ_n sont respectivement l'amplitude et la phase à l'origine de l'harmonique de rang n.**

2. Spectre d'un signal périodique

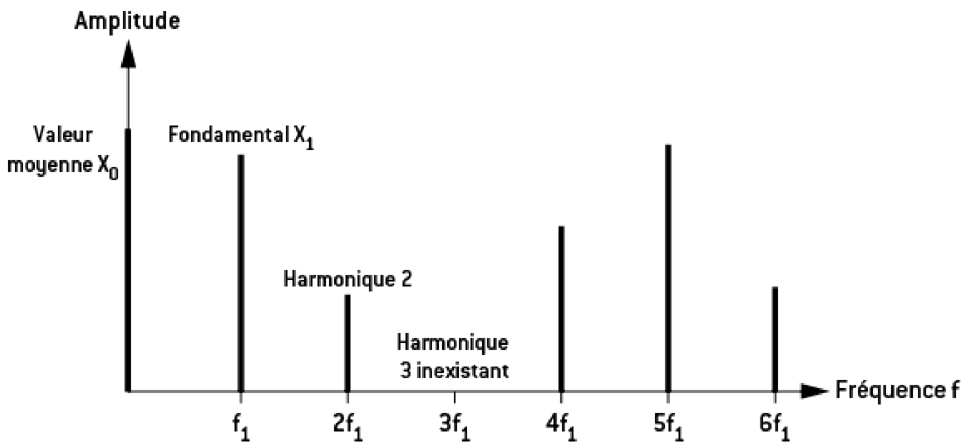
Lorsqu'un signal se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux, auxquels correspondent une amplitude, une pulsation (ou fréquence) et une phase à l'origine, on trace **en fonction de la pulsation** :
- un diagramme en bâtons représentant les amplitudes : le **spectre en amplitude**,
- un diagramme en bâtons représentant les phases à l'origine : le **spectre de phase**.

On peut lire sur un spectre en amplitude d'un signal périodique :

- **La valeur moyenne du signal** (correspond à la composante de fréquence nulle)
- **La fréquence du signal lui-même f** (correspond à la première composante de fréquence non nulle, le fondamental)
- **L'amplitude des harmoniques de rang > 1.**

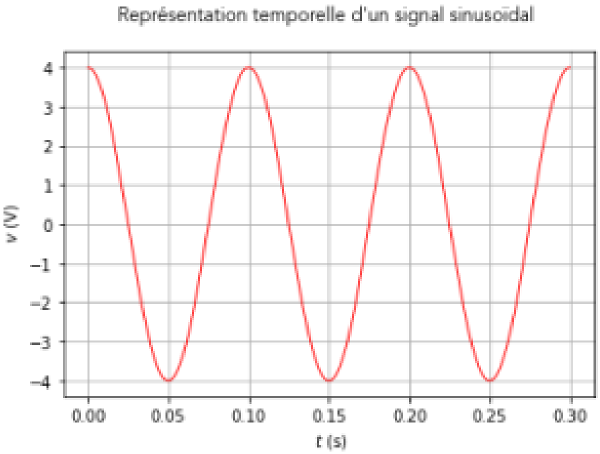


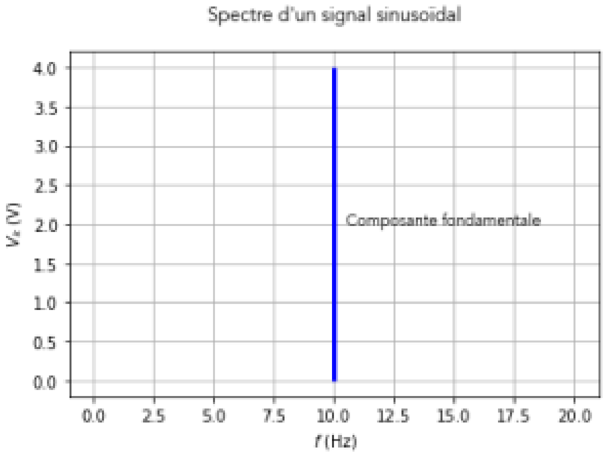
Exemple :

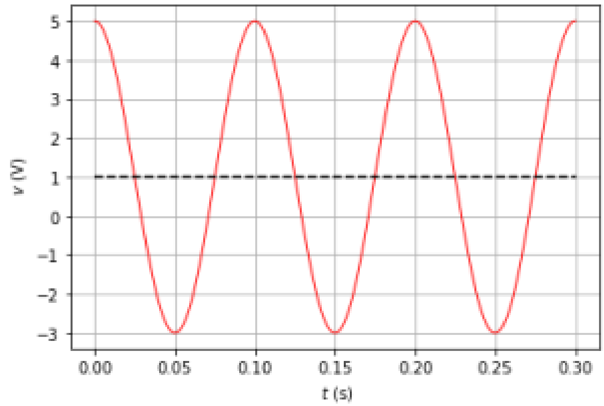


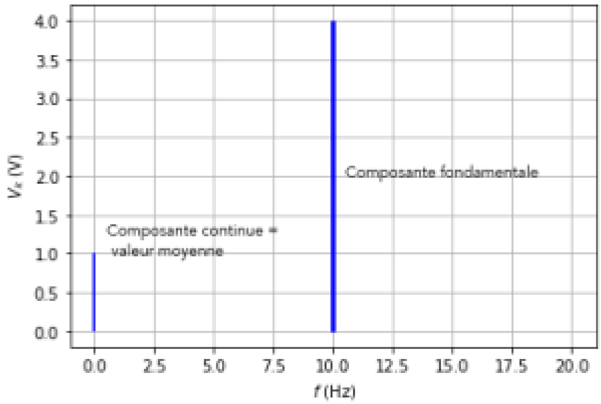
Exemples de signaux usuels :

- *Signal sinusoïdal*



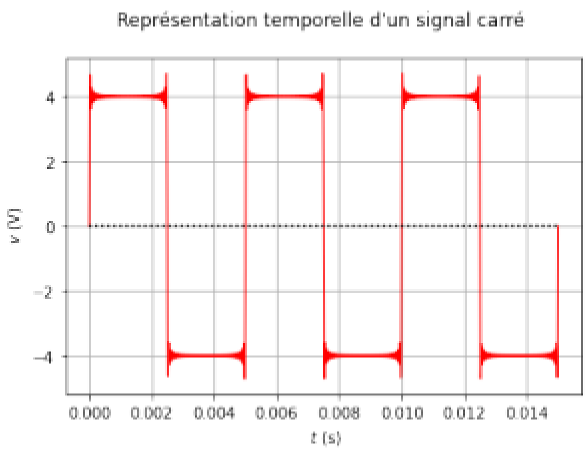


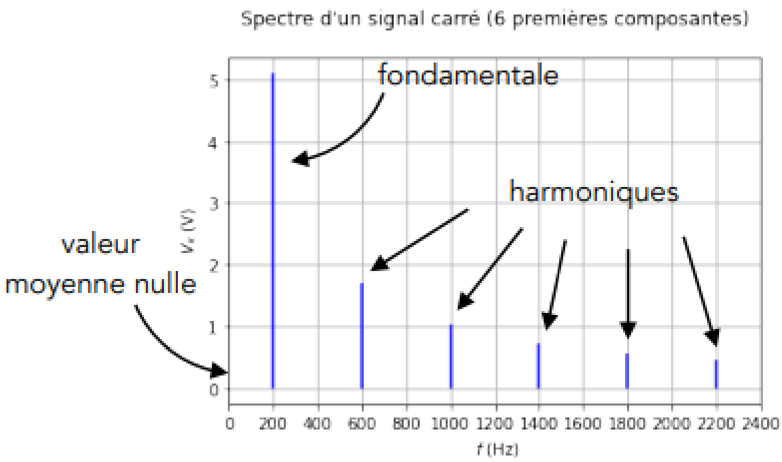




- *Signal carré d'amplitude E*

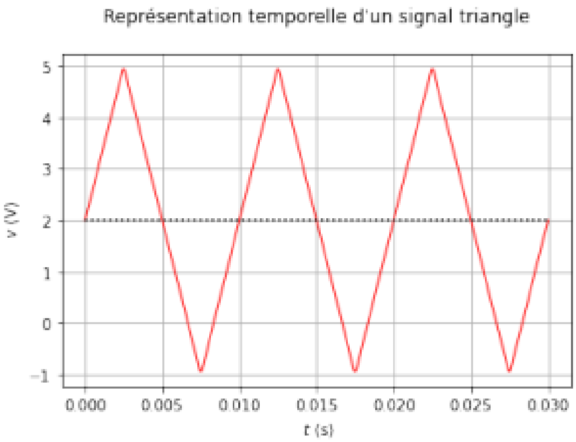
$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(cos(\omega t) + \frac{1}{3}\,cos(3\omega t) + \frac{1}{5}cos(5\omega t) + \cdots\right)$$

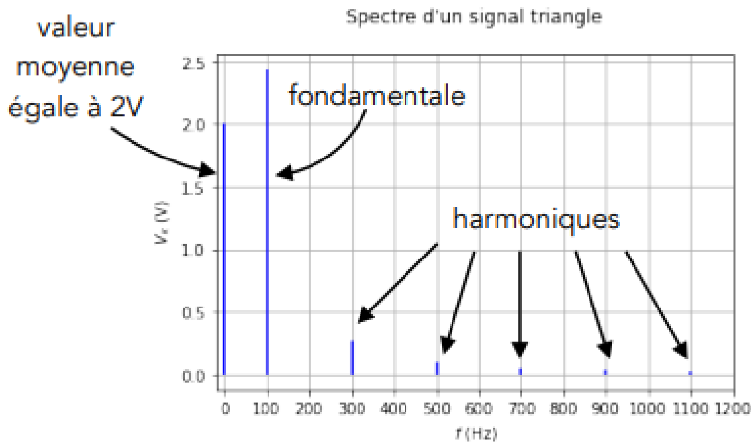




- *Signal triangle :*

$$e(t) = 2 + \frac{8E}{\pi^2}\left(cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3^2}cos\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5^2}cos\left(5\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots\right)$$





Remarque : Le spectre d'un signal périodique est d'autant plus complexe et étendu qu'il possède des variations brutales. ***Les discontinuités d'un signal engendrent des harmoniques d'ordre élevé de fortes amplitudes.***

✍ ***AP 1 et 2***

3. Intérêt d'une décomposition harmonique

La **linéarité** du filtre autorise un raisonnement par **superposition**.

Soit un signal électrique e(t) périodique de pulsation ω décomposable en série de Fourier.

On applique ce signal en entrée d'un filtre linéaire caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

Par linéarité du système, on peut traiter chaque harmonique indépendamment les unes des autres.
Un filtre linéaire ne va pas modifier la fréquence des harmoniques mais peut les atténuer, les amplifier et/ou les déphaser. Il délivre alors un signal de sortie $s(t)$ égal à la somme de chaque harmonique transmis et modifié (en amplitude et en phase).

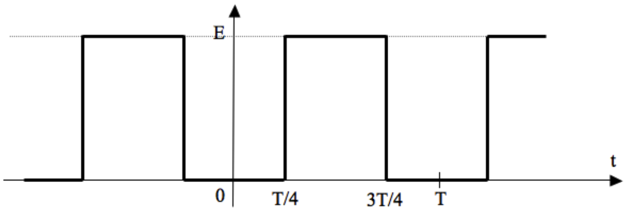
On comprend alors l'intérêt qu'il y a à décomposer un signal périodique quelconque en une somme de composantes sinusoïdales : la réponse à **chacune des harmoniques du signal d'entrée est connue grâce à la fonction de transfert**, il suffit de **sommer ces réponses pour obtenir le signal de sortie résultant.**

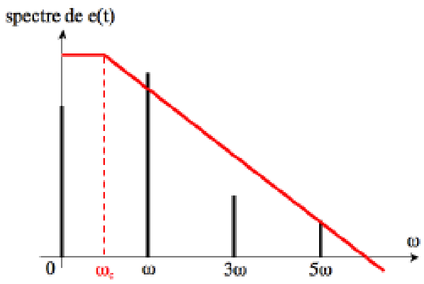
4. Utilisation d'un diagramme de Bode : réponse d'un filtre linéaire à une fonction périodique

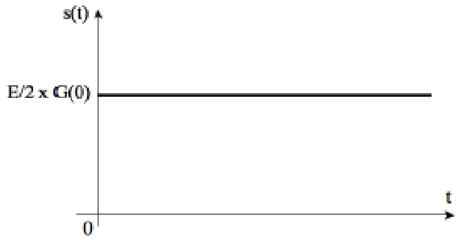
4.1 Etude rapide

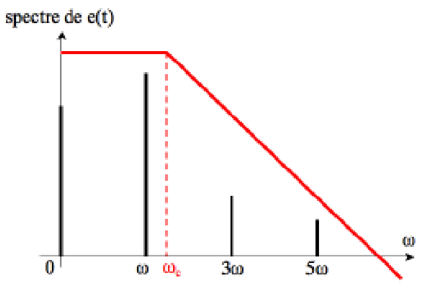
La superposition du diagramme de Bode et du spectre de e(t) permet de se faire une idée sur l'allure du signal de sortie s(t).

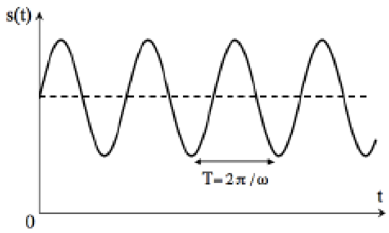
Exemple : appliquons un filtre sur le signal créneau ci-dessous.

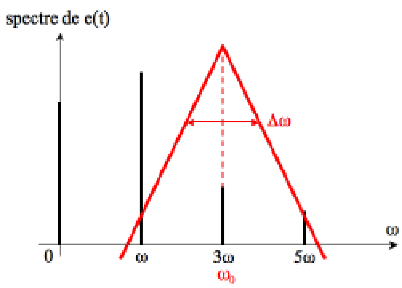


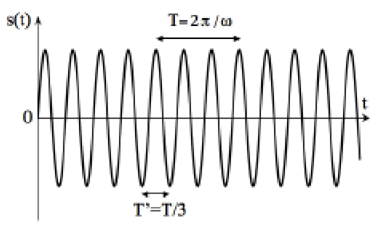












Remarque : La sélection de fréquences opérée par les filtres est d'autant plus performante que les pentes des asymptotes sont élevées donc que l'ordre du filtre est élevé.

AP 3

4.2 Etude précise

Pour chaque composante du spectre du signal d'entrée de pulsation ω :

L'amplitude de la composante en sortie : $|\underline{s_n}| = |\underline{H(jn\omega)}|\,|\underline{e_n}|$

La phase à l'origine de la composante en sortie : $arg(\underline{s_n}) = arg(\underline{e_n}) + arg(\underline{H(jn\omega)})$

Applications

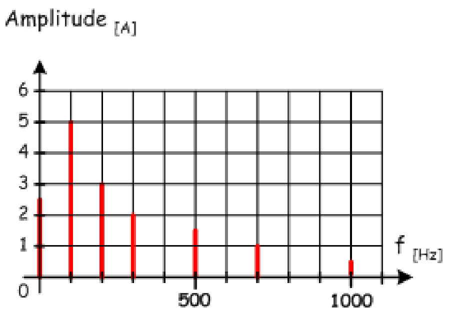
Application 1 : Spectre d'un signal

Dessiner les spectres d'amplitude et de phase du signal suivant (en V) de fréquence $f = 10$ Hz :

$$e(t) \ = 2 \ + 3\ cos(\omega t) + 5\ cos(3\omega t + \frac{\pi}{2}) + cos(4\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Application 2 : Analyse spectrale

L'analyse spectrale d'une intensité i(t) a donné le spectre en amplitude suivant :



1) S'agit-il d'un signal périodique, justifier ? Si oui, quelle est la fréquence de ce signal ?
2) Quelle est la valeur moyenne du signal ?
3) En supposant que tous les termes de phases sont nuls, exprimer i(t).

Application 3 : Action d'un filtre sur un signal périodique

1) On considère un filtre passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est 100 Hz. Donner l'allure du signal de sortie si on envoie à l'entrée :
   a) Une sinusoïde d'amplitude 4 V, de moyenne 1 V et de fréquence 2 kHz.
   b) Un créneau d'amplitude 4 V, de moyenne 1 V et de fréquence 2 kHz.
   c) Un créneau d'amplitude 4 V, de moyenne 1 V et de fréquence 75 Hz.

2) On considère un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est 100 Hz. Donner l'allure du signal de sortie si on envoie à l'entrée :
   a) Une sinusoïde d'amplitude 4 V, de moyenne nulle et de fréquence 1 kHz.
   b) Une sinusoïde d'amplitude 4 V, de moyenne 1 V et de fréquence 1 kHz.
   c) Un créneau d'amplitude 4 V, de moyenne nulle et de fréquence 1 kHz.
   d) Un créneau d'amplitude 4 V, de moyenne 1 V et de fréquence 1 kHz.