Correction TD7

Exercice 1 :

1) loi des mailles : $\underline{e} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{i}$ $\qquad$ $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

2) $\Delta\varphi_{i/e} = +63,4°$ ← i en avance $\qquad$ or $\Delta\varphi_{i/e} = \arg(\underline{i}) - \arg(\underline{e}) = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} = -\tan\Delta\varphi_{i/e} \Rightarrow R = \frac{1/C\omega - L\omega}{\tan\Delta\varphi_{i/e}} = 20\,\Omega$$

3) $|\underline{i}| = \frac{|\underline{e}|}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} = 2,68\,A$

Exercice 2 :

Si les intensités efficaces affichées par l'ampèremètre en mode AC sont les mêmes alors les modules des impédances sont égaux.

- K_1 et K_2 ouverts : $\underline{Z}_1 = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ $\qquad |\underline{Z}_1|^2 = r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$

- K_1 ouvert, K_2 fermé : $\underline{Z}_2 = r + jL\omega$ $\qquad |\underline{Z}_2|^2 = r^2 + L^2\omega^2$

- K_1 fermé et K_2 ouvert : $\underline{Z}_3 = \frac{1}{jC\omega}$ $\qquad |\underline{Z}_3|^2 = \frac{1}{C^2\omega^2}$

$$|\underline{Z}_1|^2 = |\underline{Z}_2|^2 \Leftrightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = L^2\omega^2$$

2 solutions : $\quad$ • $L\omega - \frac{1}{C\omega} = L\omega \Leftrightarrow -\frac{1}{C\omega} = 0$ impossible

$L\omega - \frac{1}{C\omega} = -L\omega$ $\qquad 2L\omega = \frac{1}{C\omega} \iff \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{2LC}}}$

. $|\underline{Z}_2|^2 = |\underline{Z}_3|^2 \iff r^2 + L^2\omega^2 = \frac{1}{C^2\omega^2}$

$r^2 = -L^2 \times \frac{1}{2LC} + \frac{2LC}{C^2} = \frac{3}{2}LC \qquad \boxed{r = \sqrt{\frac{3LC}{2}}}$

Exercice 3 :

1) Par lectures graphiques : $U_m = 1{,}3\,V$ $\quad V_m = 6\,V$

$T = 1\,ms \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 6{,}3 \times 10^3\ rad.s^{-1}$

2) décalage temporel $|\Delta t| = 0{,}12\,ms$

$v(t)$ étant en retard $\Delta\varphi_{v/u} < 0 \qquad \Delta\varphi_{v/u} = -\frac{2\pi|\Delta t|}{T} = -0{,}75\ rad$

3) $\underline{v} = \underline{Z}\,\underline{i}$ et $\underline{u} = R\,\underline{i} \Rightarrow \underline{v} = \frac{\underline{Z}}{R}\underline{u}$

4) $\Delta\varphi_{v/u} = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{u}) = \arg(\underline{Z}) - \arg(R) = \arg(\underline{Z})$

si $\underline{Z} = X + jY \qquad X = |\underline{Z}|\cos(\Delta\varphi_{v/u}) \qquad Y = |\underline{Z}|\sin(\Delta\varphi_{v/u})$

$|\underline{Z}| = R\frac{V_m}{U_m} \quad \rightarrow X = 337\,\Omega \qquad Y = -314\,\Omega$

réel > 0 — imaginaire < 0

modélisable par 1 résistance $R = 337\,\Omega$ — modélisable par 1 condensateur de capacité telle $Y = \frac{1}{C\omega}$ $\quad C = 507\,nF$

Dipôle équivalent :

Rq : autre méthode

$$\begin{cases} |\underline{Z}| = X^2 + Y^2 = R\frac{V_m}{U_m} \\ \frac{Y}{X} = \tan(\Delta\varphi_{v/u}) \end{cases}$$

on résout ce système (+ long)

Exercice 4 :

1) a) $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

b) $I_m = |\underline{i}| = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

c) I_m est maximum si $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$ soit pour $\omega = \omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ où ω_2 et ω_1 sont telles que $I_m(\omega_1 \text{ ou } \omega_2) = \dfrac{(I_m)_{max}}{\sqrt{2}}$

$(I_m)_{max} = \dfrac{E}{R} \Rightarrow I_m = \dfrac{(I_m)_{max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$

ω_1 et ω_2 sont solutions de $\dfrac{L}{R}\omega - \dfrac{1}{RC\omega} = \pm 1$

- $\dfrac{L}{R}\omega - \dfrac{1}{RC\omega} - 1 = 0$ $\quad \dfrac{L}{R}\omega^2 - \omega - \dfrac{1}{RC} = 0$

$\Delta = 1 + 4\dfrac{L}{R^2C} > 0$ 1 seule solution réelle > 0 : $\omega_2 = \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2L} R$

- $\dfrac{L}{R}\omega - \dfrac{1}{RC\omega} + 1 = 0$ admet de la même façon une seule solution réelle > 0 $\quad \omega_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2L} R$ $\quad$ (m̂ Δ)

Bande passante : $\Delta\omega = \dfrac{R}{L} = \dfrac{\omega_0}{Q}$

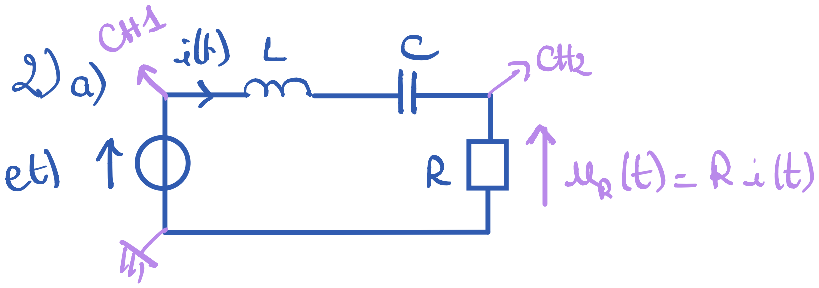
rappel : RLC série

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

d) $\varphi = \arg(\underline{i}) - \underbrace{\arg(\underline{e})}_{0} = -\arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$

$\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}$ $\quad$ $\omega = \omega_r \Rightarrow \tan\varphi = 0$

2) a)



D'après la question 2b), l'amplitude de u(t) est toujours inférieure ou égale à celle de e(t).

b) Pic de résonance observé pour $f_r = 2{,}4$ kHz

c) Au pic de résonance : $I_m = (I_m)_{max} = \frac{E}{R}$ ← 6V

$I_{max} = 18{,}5$ mA

↑ $\triangle$ efficace

$$R = \frac{E}{\sqrt{2}\, I_{max}} = 229\,\Omega$$

d) on lit graphiquement f_1 et f_2 telles que $I(f_1) = I(f_2) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

$f_1 \simeq 2{,}0$ kHz $\quad f_2 = 2{,}8$ kHz

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{f_r}{\Delta f} = 3$$

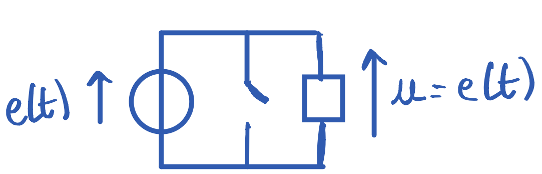
c) $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{R}{L} \Rightarrow L = \frac{R}{2\pi\Delta f} = 46\text{ mH}$

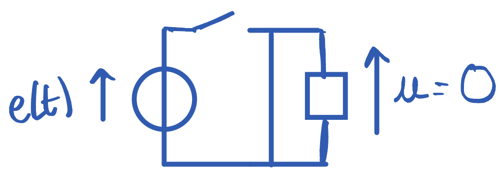
$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 L f_r^2} = 97\text{ nF}$

} Valeurs cohérentes

Exercice 5 :

1) . TBF . THF





2) $R \parallel C \rightarrow \dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega$

$$\underline{u} = \underline{e} \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{eq}} = \underline{e} \dfrac{1}{1 + \underline{Z}_L \times \dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}}} = \underline{e} \dfrac{1}{1 + j\dfrac{L\omega}{R} - LC\omega^2}$$

$$\underline{u} = \underline{e} \dfrac{1}{1 - LC\omega^2 + j\dfrac{L\omega}{R}}$$

3) $\underline{u} = \underline{e} \dfrac{1}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \Rightarrow x^2 = LC\omega^2 = \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\frac{L}{R}\omega = \frac{x}{Q} = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \rightarrow Q = \frac{R}{L\omega_0} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Q est d'autant plus grand que la résistance R est grande.

4) il y a résonance si $|\underline{u}|$ admet 1 maximum pour 1 valeur de ω non nulle (ou de x non nulle).

$$|\underline{u}| = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}_{f(x)}}} \qquad \frac{d|\underline{u}|}{dx} = 0 \text{ si } f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 2(1-x^2)\times(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x\left(\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2)\right)$$

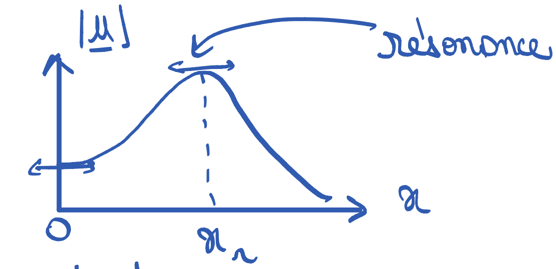
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{régime continu}} \text{ ou } 2(1-x^2) = \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La solution $x = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ existe si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0$

si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} |\underline{u}| > 0 \text{ et } |\underline{u}| \xrightarrow[x \to 0]{} E \\ |\underline{u}| \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \end{array}\right\} \text{ on admet que } \omega_r \text{ correspond à 1 maximum de } |\underline{u}|$$

Rq : • si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = 0$: minimum
x_r : maximum



• si $Q < 1/\sqrt{2}$ $x = 0$ maximum

Exercice 6 :

La voie X observe $e(t)$, la voie Y observe $u_R(t)$ et donc $i(t)$ à R près.

X et Y en phase $\Leftrightarrow$ $e(t)$ et $i(t)$ en phase :
l'impédance du circuit est réelle >0.

$$\underline{Z}_{eq} = jL\omega + r + R + \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = r + R + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{Z}_{eq} = R + r + R\frac{(1 - jRC\omega)}{1 + R^2C^2\omega^2} + jL\omega$$

$$= \underbrace{R + r + \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2}}_{\text{partie réelle} > 0} + j\underbrace{\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}\right)}_{\text{partie imaginaire à annuler}}$$

$$L\cancel{\omega} = \frac{R^2C\cancel{\omega}}{1 + R^2C^2\omega^2} \quad (\omega \neq 0)$$

$$L + LR^2C^2\omega^2 = R^2C$$

$$\boxed{L = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

$$\boxed{L = 44\,\text{mH}}$$