

# Devoir surveillé n° 4

**Durée : 3 heures**

- ✓ *La calculatrice est autorisée*
- ✓ *Les réponses doivent être justifiées.*
- ✓ *Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.*
- ✓ **Critères de présentation** : un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.

<b>Critère</b>	<b>Indicateur</b>
<i>Lisibilité de l'écriture</i>	<i>L'écriture ne ralentit pas la lecture.</i>
<i>Respect de la langue</i>	<i>La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.</i>
<i>Clarté de l'expression</i>	<i>Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1<sup>ère</sup> lecture</i>
<i>Propreté de la copie</i>	<i>La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.</i>
<i>Mise en évidence des résultats</i>	<i>Résultats encadrés ou soulignés</i>
<i>Identification des questions et pagination</i>	<i>Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.</i>

## Exercice 1 : Filtrage audio analogique

L'oreille humaine est capable de percevoir en moyenne les sons de 20 Hz à 20 kHz. Un même haut-parleur ne peut pas restituer toute cette plage de fréquence avec une bonne qualité. La taille, le poids et la rigidité de la membrane surtout sont des facteurs déterminants.

Les enceintes acoustiques comportent donc en général plusieurs haut-parleurs, adaptés spécifiquement à des gammes distinctes de fréquence. Chacun de ces haut-parleurs est précédé par un filtre et permet de reproduire qu'une partie des fréquences seulement. L'ensemble permet de reproduire de manière correcte toute la gamme de fréquence.

Les haut-parleurs spécialisés dans la reproduction des sons graves (fréquences basses) sont appelés woofer, ou boomer. Ceux spécialisés dans la reproduction des sons médiums (fréquences moyennes) sont appelés médiums. Ceux spécialisés dans la reproduction des sons aigus (fréquences élevées) sont appelés tweeter.

Dans le schéma de principe suivant (Figure 1), un amplificateur audio de puissance délivre un signal large bande (contenant les graves, les médiums et les aigus) qui est découpé en trois bandes à l'aide de filtres passifs dont les caractéristiques sont adaptées aux caractéristiques propres des haut-parleurs utilisés.

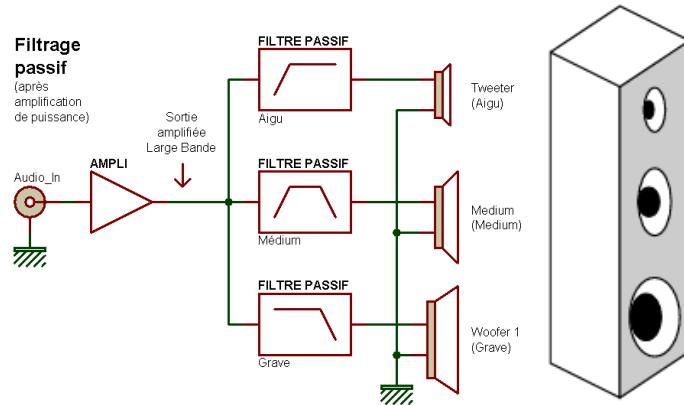


Figure 1 - Système à 3 voies

## A. Etude d'un système à 2 voies

### A.1. Filtres simples et ordres de grandeurs

On s'intéresse dans ce qui suit à un dispositif à deux voies, comportant un woofer et un tweeter. Ils se distinguent notamment par le diamètre de la membrane, qui est grossièrement de l'ordre de grandeur d'une demi-longueur d'onde de l'onde sonore préférentiellement produite.

La figure 2 ci-dessous montre un premier montage possible. Celui-ci est alimenté par une tension d'entrée  $V_e(t)$  de pulsation  $\omega$ . Chaque haut-parleur est assimilé à une résistance  $R$ .

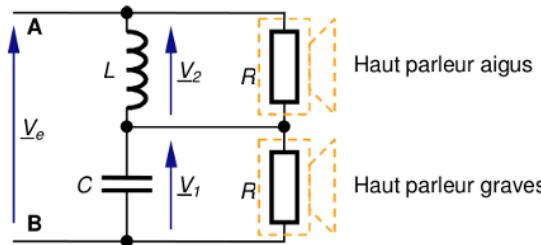


Figure 2 - Système à 2 voies

Le montage doit répondre au cahier des charges suivant.

#### Cahier des charges

- Le boomer doit restituer correctement les fréquences inférieures à 1 kHz et le tweeter les fréquences supérieures à 1 kHz.
- La puissance du signal délivrée par l'amplificateur fournit la tension  $V_e$  doit être indépendante de la fréquence du signal.

**Q1.** Proposer une estimation des diamètres respectifs des woofer et tweeter. On donne la célérité du son  $c_{son} = 343 \text{ m.s}^{-1}$ .

Pour chacun des deux haut-parleurs, la puissance maximale délivrée est de l'ordre de 80 W. Ils sont alimentés par l'étage de sortie de l'amplificateur audio de tension efficace maximale 20 V.

- Q2.** Proposer une estimation de la valeur de  $R$ .
- Q3.** Déterminer l'expression de l'impédance complexe  $Z$  entre les bornes A et B en fonction de la pulsation  $\omega$ ,  $L$ ,  $R$  et  $C$ .
- Q4.** Déterminer la relation entre  $R$ ,  $L$  et  $C$  pour que l'impédance  $Z$  soit égale à  $R$  quelle que soit la pulsation  $\omega$ .

**Q5.** Quel est l'intérêt de cette condition ?

Dans la suite, on suppose la condition  $\underline{Z} = R$  vérifiée.

**Q6.** Etudier la nature de chaque filtre et vérifier la cohérence avec le haut-parleur associé.

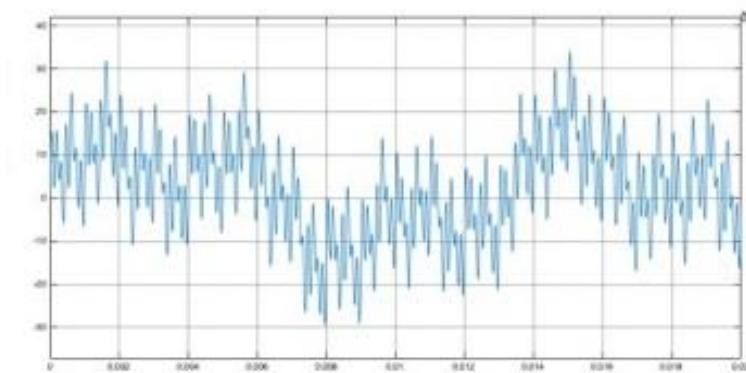
**Q7.** Établir les fonctions de transfert complexes  $\underline{T}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_e}$  et  $\underline{T}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_e}$  des filtres.

**Q8.** Exprimer les pulsations de coupure des filtres.

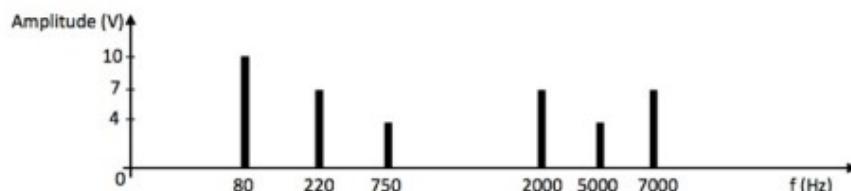
**Q9.** Proposer des valeurs de L et C répondant aux cahiers des charges.

**Q10.** Etudier puis tracer, pour chaque filtre, les diagrammes de Bode (en gain et en phase) asymptotiques et réels.

**Q11.** On considère le signal audio ci-dessous ainsi que son spectre de Fourier. Tracer l'allure du spectre en amplitude du signal de sortie du woofer et du tweeter.



**Figure 3 - Signal audio**



**Figure 4 - Spectre du signal audio**

## A.2. Filtres de Butterworth (CCS MPI 2025)

Les filtres de Butterworth sont des filtres linéaires conçus pour posséder un gain aussi constant que possible dans leur bande passante. Ils sont définis par des fonctions de transfert complexes  $\underline{H}_1(\omega)$  ou  $\underline{H}_2(\omega)$  telles que :

$$|\underline{H}_1(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad |\underline{H}_2(\omega)|^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad (1)$$

Où  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1 \text{ kHz}$  est la fréquence de coupure du filtre et  $n$  l'ordre du filtre.

On réalise de tels filtres par la mise en cascade de cellules du 2<sup>nd</sup> ordre avec éventuellement une cellule du 1<sup>er</sup> ordre pour les ordres impairs.

Pour la suite, on pose la pulsation (ou fréquence) réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et on étudie les filtres représentés figure 5.

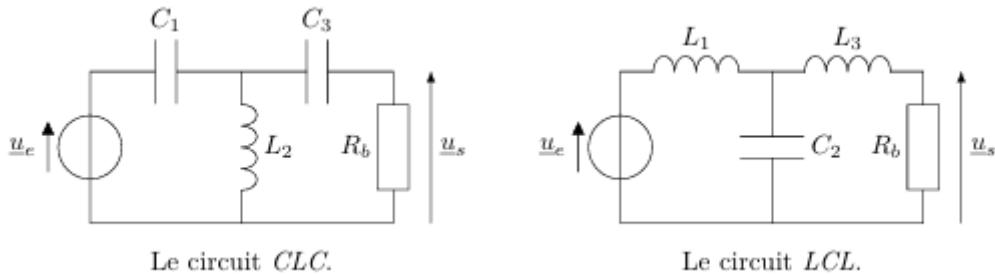


Figure 5 – Filtres de Butterworth

**Q12.** Sans calcul, mais au moyen de raisonnements justifiés, indiquer lequel des deux circuits proposés correspond aux filtres  $\underline{H}_1(\omega)$  et  $\underline{H}_2(\omega)$  respectivement, et lequel sera utilisé pour alimenter le tweeter et le woofer respectivement.

**Q13.** Exprimer en dB/décade et en fonction de  $n$  l'atténuation asymptotique du filtre passe-bas.

On s'intéresse ici à des filtres passe-bas d'ordre 2 ou 3 et de pulsation caractéristique  $\omega_0$  dont les fonctions de transfert sont respectivement :

$$\underline{B}_2(jx) = \frac{1}{1-x^2+\alpha(jx)} \quad \underline{B}_3(jx) = \frac{1}{1+\alpha_1(jx)+\alpha_2(jx)^2-jx^3}$$

Où les coefficients  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont réels et strictement positifs.

**Q14.** Exprimer  $|\underline{B}_2|^2$  et en déduire la condition pour laquelle un tel filtre vérifie la condition (1) qui en fait un filtre de Butterworth d'ordre 2.

**Q15.** Déterminer de même les coefficients qui font du filtre  $\underline{B}_3$  un filtre de Butterworth d'ordre 3.

### Décalage entre les deux haut-parleurs

On considère dorénavant que les deux haut-parleurs grave et aigus ont alimentés à partir du même signal composite  $E(t)$  au moyen de deux filtres du troisième ordre et de même pulsation caractéristique  $\omega_0$ , de fonctions de transfert respectives explicitées en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$\underline{H}_g(jx) = \frac{1}{1+2jx+2(jx)^2+(jx)^3} \quad \underline{H}_a(jx) = \frac{(jx)^3}{1+2jx+2(jx)^2+(jx)^3}$$

On les note  $\underline{H}_k = G_k e^{j\varphi_k}$ , avec  $G_k > 0$ ,  $\varphi_k \in \mathbb{R}$  pour  $k \in \{g, a\}$ .

Dans cette partie, on s'intéresse au décalage entre les sons grave et aigu émis par les deux haut-parleurs combinés, dans le cas où ces sons sont des signaux de pulsation  $\omega$  voisine de  $\omega_0$ , de sorte que les intensités produites par les deux haut-parleurs sont comparables. Il est alors important que le décalage temporel  $\Delta t$  entre les signaux grave et aigu reste le plus faible possible, typiquement inférieur à 0,1 ms.

Deux causes possibles sont envisagées pour ce décalage temporel  $\Delta t$ .

- Entre l'amplificateur et les haut-parleurs, le signal se propage le long de câbles de liaison à une célérité proche de celle de la lumière et une différence de longueur des câbles peut introduire un décalage temporel  $\Delta t_0$  ;
- A la sortie de l'amplificateur, les filtres de fonctions de transfert  $\underline{H}_g$  et  $\underline{H}_a$  imposent des retards de phase que l'oreille interprète comme un décalage temporel  $\Delta t_1$  ;

- Q16.** Justifier quantitativement que  $\Delta t_0$  est négligeable.
- Q17.** Calculer le déphasage théorique entre les 2 haut-parleurs. Commenter.
- Q18.** En déduire l'expression du décalage  $\Delta t_1$ . Le calculer pour  $x = 1$ . Commenter.

## B. Impédance d'un haut-parleur (inspiré de CCS TSI 2013)

Le haut-parleur est en réalité un système électroacoustique complexe. Il est constitué d'un aimant qui crée un champ magnétique  $B$ , d'une bobine (de longueur de fil  $l$ ) mobile solidaire d'une membrane dont elle commande le mouvement en vue de créer des ondes de pression et de produire un son.

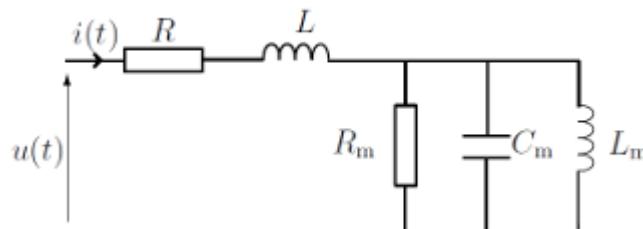
Généralement, on réduit le modèle mécanique à un simple vibrateur linéaire constitué par un ressort de raideur  $k$  (qui modélise l'effet élastique de la membrane), une masse  $m$  (qui représente la masse de l'équipage mobile) et un terme dissipatif linéaire caractérisé par un coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ .

L'étude du système conduit alors à introduire une impédance dite motionnelle  $\underline{Z}_m$  (qui dépend de  $m, l, k, \alpha$  et de la pulsation  $\omega$ ) qui s'ajoute à celle de la bobine  $\underline{Z}_e = R + jL\omega$  où  $R$  est la résistance électrique de la bobine du haut-parleur et  $L$  son inductance propre. L'impédance totale est alors :

$$\underline{Z}(j\omega) = R + jL\omega + \frac{B^2 l^2}{\alpha + j(m\omega - \frac{k}{\omega})}$$

**Q19.** On pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Mettre  $\underline{Z}_m$  sous la forme  $\underline{Z}_m = \frac{R_0}{1 + jQ(x-1/x)}$ . Donner l'expression, l'unité et la signification de  $\omega_0, R_0$  et  $Q$ .

**Q20.** On propose le schéma électrique équivalent suivant. Exprimer les grandeurs  $R_m, L_m$  et  $C_m$  en fonction de  $l, B, k, m$  et  $\alpha$ .

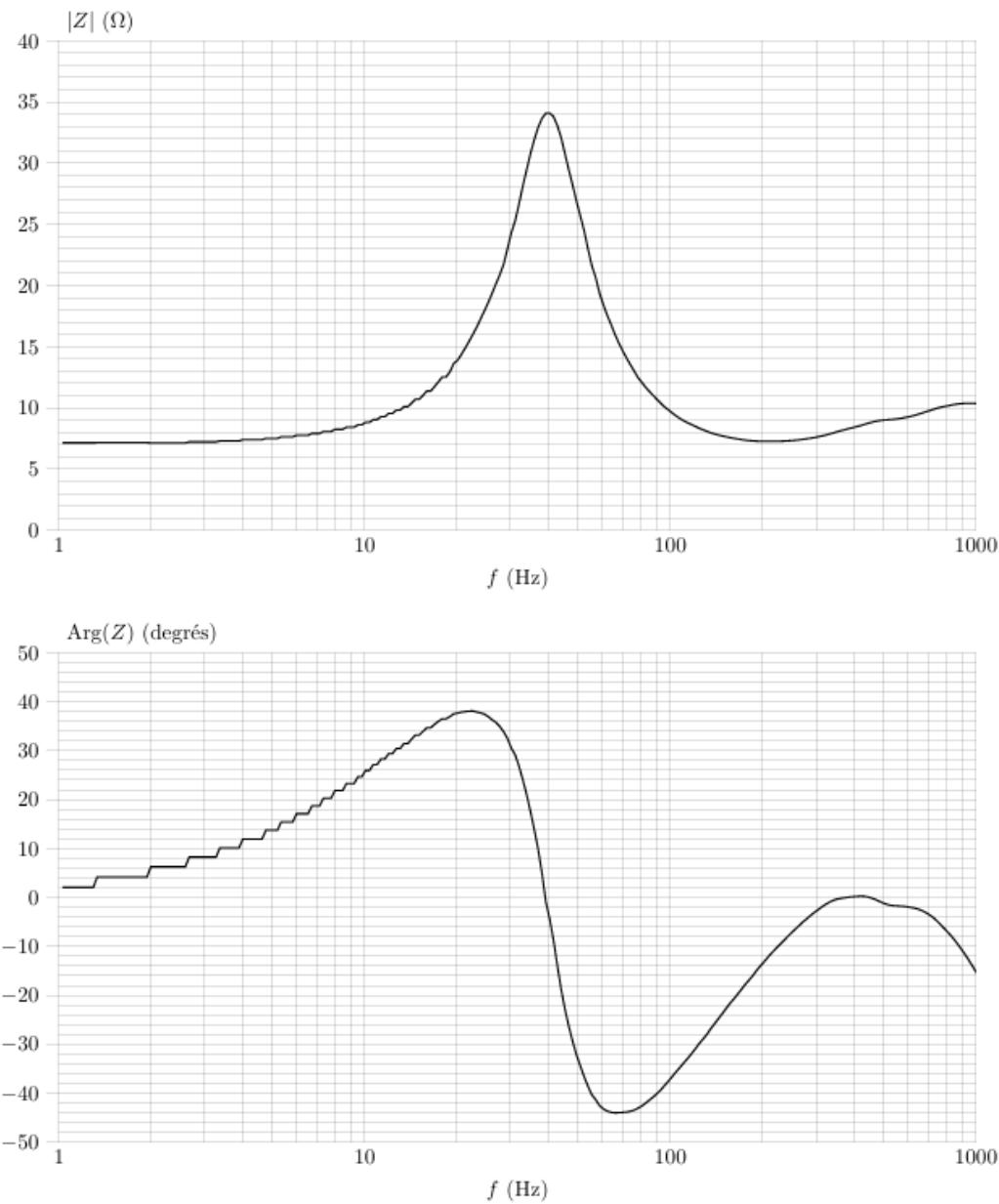


La figure 7 donne les graphes du module et de l'argument de  $\underline{Z}$  d'un haut-parleur réel pour des fréquences  $f$  allant de 1 Hz à 1 kHz. L'échelle des abscisses est logarithmique. L'argument est en degrés.

On cherche à savoir dans quelle mesure le modèle précédent est adapté.

- Q21.** Etudier les comportements asymptotiques du module de  $\underline{Z}$ . La courbe du module est-elle en accord avec le modèle ? Proposer alors une valeur de  $R$ .
- Q22.** L'inductance propre de la bobine est inférieure à 0,5 mH. Justifier numériquement que, pour les fréquences inférieures à 300 Hz, on peut écrire  $\underline{Z}(j\omega) \approx R + \underline{Z}_m$ .

**On fera cette approximation dans la suite du problème.**

**Figure 7 - Impédance d'un haut-parleur**

On pose  $R_{HP} = R + R_0$  et  $g(x) = Q(x - 1/x)$ .

- Q23.** Récrire  $\underline{Z}$  en fonction uniquement de  $R_{HP}$ ,  $R$  et  $g(x)$ .
- Q24.** Exprimer le module de  $\underline{Z}$ , noté  $|\underline{Z}|$ .
- Q25.** Montrer que  $|\underline{Z}|$  est extrémal pour  $x = 1$ . On admettra qu'il s'agit d'un maximum.
- Q26.** Déterminer graphiquement la fréquence  $f_0$  et  $R_0$  en expliquant la méthode utilisée.
- Q27.** Déterminer  $g(x)$  en fonction de  $R_{HP}$  et  $R$  pour les fréquences de coupure  $f_{c1}$  et  $f_{c2} > f_{c1}$ .
- Q28.** En remarquant que  $2R^2 \ll R_{HP}^2$ , exprimer la bande passante  $f_{c2} - f_{c1}$  en fonction de  $Q$  et  $f_0$ .
- Q29.** En déduire une estimation graphique de  $Q$ .
- Q30.** Une méthode plus précise pour mesurer  $Q$  consiste à mesurer les pulsations réduites solutions de l'équation  $|\underline{Z}|^2 = RR_{HP}$ . Montrer que cette équation possède deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$ , inverses l'une de l'autre que l'on ne cherchera pas à expliciter.
- Q31.** Exprimer  $\Delta x = x_1 - x_2$  en fonction de  $Q$ ,  $R_{HP}$  et  $R$ .
- Q32.** En déduire une méthode graphique de détermination de  $Q$  et la mettre en œuvre.
- Q33.** La remontée de  $|\underline{Z}|$  aux hautes fréquences semble compatible avec la présence de l'inductance propre de la bobine. Pourquoi le modèle est-il cependant pris en défaut ?

## Exercice 2 : Fabrication de vagues artificielles

Les jeux olympiques représentent un évènement sportif majeur. De nouveaux sports, tels que le surf, ont été ajoutés aux quarante disciplines existantes, ce qui constraint les pays d'accueil à disposer de nouveaux équipements.

C'est en 2016 que la mairie de Sevran en Seine-Saint-Denis imagine une piscine à vagues doublée d'un ambitieux projet immobilier destiné à accueillir les épreuves de surf des Jeux olympiques de Paris 2024. Le projet, abandonné pour des raisons écologiques, prévoyait la construction d'un bassin entièrement artificiel d'une superficie de 25 000 m<sup>3</sup> capable de générer jusqu'à 720 vagues artificielles par heure, avec un temps de glisse moyen de 26 secondes.



**Figure 9 – Projet de Sevran**

**Q34.** Estimer la célérité  $c$  de l'onde.

On s'intéresse dans la suite à la production de vagues dans une piscine.

### Oscillations horizontales d'une plaque verticale

Une technique consiste à produire des ondes progressives, que l'on supposera sinusoïdales, à une extrémité de la piscine par déplacement horizontal d'un panneau métallique.

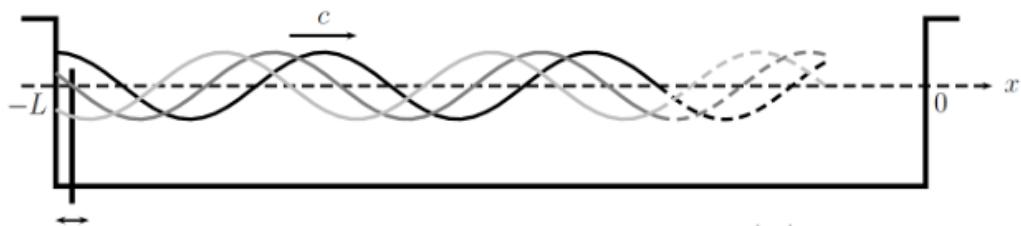
La superposition de cette onde avec l'onde réfléchie à l'autre bout de la piscine produira une onde stationnaire (aucune connaissance de ce type d'onde n'est nécessaire).

On donne la relation liant la célérité  $c$  des vagues à la profondeur  $H$  de la piscine, la masse volumique  $\rho$  de l'eau, l'accélération de la pesanteur  $g$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et le coefficient de tension superficielle  $A$  de l'interface eau-air.

$$c^2 = g H + \frac{4\pi H A}{\rho \lambda^2}$$

**Q35.** Quelle est la dimension de  $A$  ?

Les oscillations à la pulsation  $\omega$  du plateau métallique permettent de produire une variation sinusoïdale de la hauteur du point de la surface de l'eau situé à l'extrémité gauche de la piscine, en  $x = -L$ . On posera  $k = \frac{\omega}{c}$ .



**Figure 10 – Piscine à vagues**

On suppose que la hauteur, à l'instant  $t$ , de l'eau au point de la piscine d'abscisse  $x = -L$  est décrit par une fonction sinusoïdale telle que :  $z_i(-L, t) = Z_m \cos(\omega t)$ ,

Il apparaît une onde progressive se déplaçant sans atténuation dans le sens des  $x$  croissants à la célérité  $c$ .

- Q36.** Donner l'expression de  $z_i(x, t)$ .
- Q37.** A l'extrémité  $0$  d'abscisse  $x = 0$  de la piscine, apparaît une onde réfléchie de même amplitude  $Z_m$  et de même célérité que l'onde incidente. L'onde réfléchie  $z_r(x, t)$  est telle que  $z_r(0, t) = z_i(0, t)$  à tout instant. En déduire l'expression de l'onde réfléchie  $z_r(x, t)$ .
- Q38.** La superposition des deux ondes progressives  $z_r(x, t)$  et  $z_i(x, t)$  donne naissance à une onde dite stationnaire  $z(x, t) = z_r(x, t) + z_i(x, t)$ . Exprimer cette onde sous la forme  $f(x) g(t)$  où  $f(x)$  est une fonction de  $x$  et  $g(t)$  une fonction du temps, dont on donnera l'expression.

**FIN**