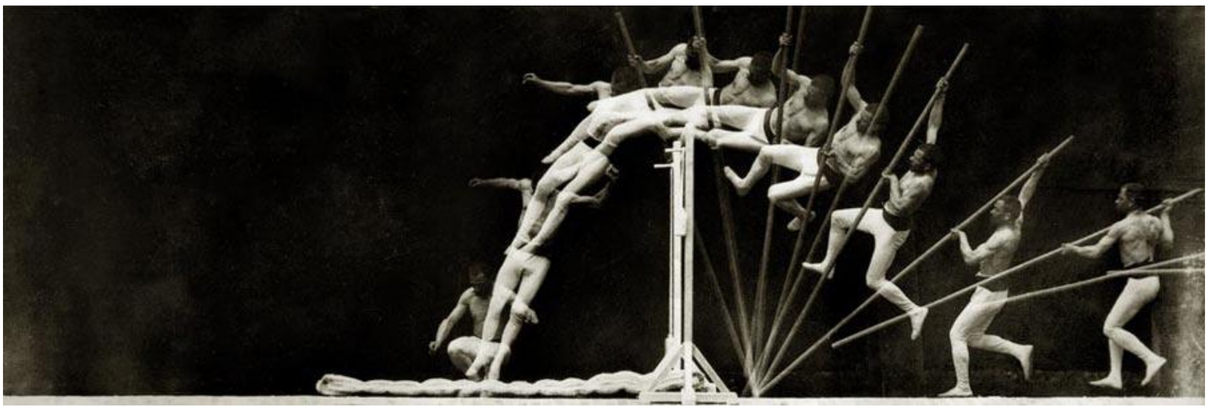
Chapitre 11
Cinématique du point matériel

« Le temps est l'image mobile de l'éternité immobile. » Platon



Le cours

La cinématique est l'étude du mouvement d'un corps indépendamment de ses causes. Elle repose sur une description euclidienne de l'espace et d'un temps absolu

I. Cadre spatio-temporel de la mécanique classique du point matériel

1. Espace et temps d'un observateur

1.1 Espace

L'espace physique correspond à un espace géométrique euclidien à 3 dimensions où l'on peut repérer la position d'un point par ses 3 coordonnées.
Selon la nature du mouvement du point, sa position sera localisée par l'un des systèmes suivants : cartésien, polaire, cylindrique ou sphérique.

1.2 Temps

Le temps sert à dater les évènements. Un événement doit être choisi pour définir l'origine du temps ($t = 0$). Le temps ne peut qu'augmenter donc il ne peut varier que dans le sens positif mais il peut prendre des valeurs négatives (évènements antérieurs à l'évènement choisi pour origine des temps).
Un instrument qui permet de dater est une horloge.

2. Notion de référentiel

Le mouvement d'un point est un concept relatif : deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre ne percevront pas le même mouvement. *Lorsqu'une bille tombe verticalement dans un train, le passager va observer une droite, tandis que la personne sur le quai va observer une parabole !*
En d'autres termes, on ne peut pas décrire le mouvement d'un corps sans préciser par rapport à quoi.

On décrit le mouvement d'un corps par rapport à un « observateur » muni d'une horloge et lié de manière fixe à un solide indéformable ($\mathcal{R}$), cet ensemble est appelé « référentiel ».

Un repère d'espace associé à un repère temporel forme donc un référentiel.

Dans un problème de mécanique il est fondamental de préciser le référentiel choisi.

Référentiels usuels :

- *Référentiel de Copernic : son centre correspond au centre de gravité du système solaire et ses directions sont données par 3 étoiles suffisamment éloignées pour être supposées fixes le temps de l'expérience.*
- *Référentiel héliocentrique : référentiel lié au centre du soleil et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées pour être supposées fixes.*
- *Référentiel géocentrique : référentiel lié au centre de la Terre et en translation par rapport au référentiel héliocentrique.*
- *Référentiel terrestre : référentiel lié à la Terre, il est lié au sol et donc en rotation par rapport au référentiel géocentrique*

En Mécanique Classique, le temps est absolu : il est le même quel que soit le référentiel. Deux observateurs dans des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes évènements.

3. Le point matériel

Si l'on ne s'intéresse pas au mouvement de rotation éventuel de l'objet mais seulement au déplacement de son centre de masse, on peut alors négliger ses dimensions et l'assimiler à un point matériel affecté de sa masse totale.

Un point matériel est un point géométrique muni d'une masse m.

Il sert à modéliser un système solide de masse m dont l'éventuel mouvement de rotation autour de lui-même n'influence pas le mouvement de son centre de masse.

Dans la suite, le point matériel sera noté M. Sa position est donnée par 3 paramètres : les 3 coordonnées du point dans l'espace. On dit qu'il possède 3 degrés de liberté de mouvement.

Le but de la mécanique est de repérer la position du point M et d'en décrire le mouvement.

II. Repérer un point matériel dans l'espace

1. Repère et base de projection

Dans un espace à trois dimensions, une **base** est un ensemble de **trois vecteurs non coplanaires**. Dans une telle base un vecteur possède une décomposition unique.

Une base est dite **normée** si les vecteurs de la base sont **unitaires** (de norme 1).

Une base est dite **orthonormée** si elle est **normée et que ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.**

Un repère est constitué d'un point origine O et d'une base vectorielle, souvent orthonormée directe. On lui associe un système de coordonnées permettant de repérer le point dans l'espace.

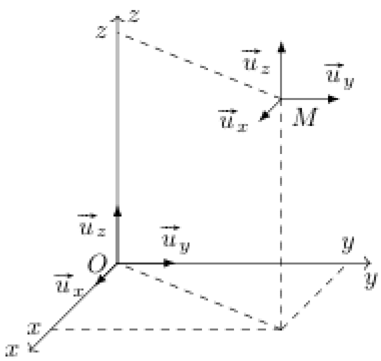
2. Vecteur position

Le vecteur position d'un point M au cours du temps est le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.

Ce vecteur est exprimé dans la base choisie en fonction de la symétrie du problème

3. Les différents systèmes de coordonnées

3.1 Coordonnées cartésiennes



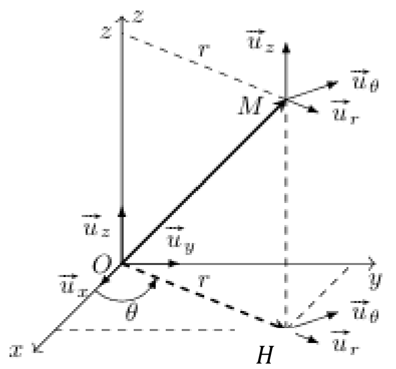
Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point M sont les valeurs algébriques mesurées par rapport au point O **des projections orthogonales de M** respectivement sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

- x est l'abscisse de M : $x \in]-\infty\,;+\infty[$
- y est l'ordonnée de M : $y \in]-\infty\,;+\infty[$
- z est la cote de M : $z \in]-\infty\,;+\infty[$

Les vecteurs de base sont les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$dirigeant les 3 axes du trièdre (Oxyz).

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_z}$

3.2 Cordonnées cylindriques

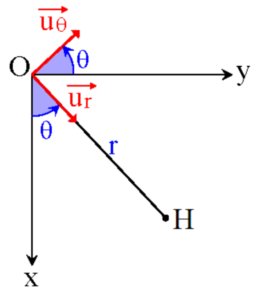


H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy).

Les coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$ d'un point M sont telles que :

- r = OH ; $r \in [0\,; +\infty[$
- θ angle orienté entre l'axe Ox et $\overrightarrow{OH}$; $\theta \in [0\,; 2\pi]$
- z est la cote de M : $z \in]-\infty\,; +\infty[$

Remarque : $x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$



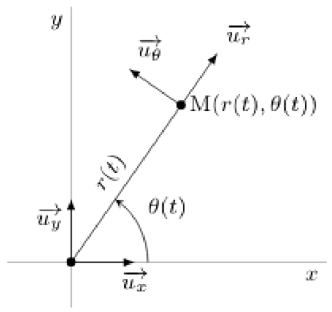
Les vecteurs de base sont les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_z}})$:

- $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire dirigé de O vers H.
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est le vecteur unitaire appartenant au plan (Oxy), perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$ et dirigé dans le sens des θ croissants.
- $\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire dirigé selon l'axe Oz

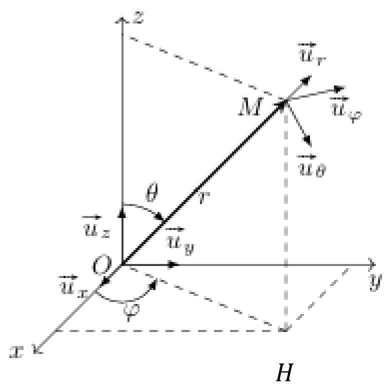
<u>Expression du vecteur position</u> : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_z}}$

*Remarque : si z = Cte (souvent 0), $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est appelée **base polaire** (très utiles pour les mouvements circulaires).*



3.3 Cordonnées sphériques



H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy).

Les **coordonnées sphérique** $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$ d'un point M sont telles que :

- $r = OM$; $r \in [0\,; +\infty[$
- θ *angle orienté entre l'axe Oz et* $\overrightarrow{OM}$; $0 \leq \theta \leq \pi$,
- $\varphi =$ *angle orienté entre l'axe Ox et* $\overrightarrow{OH}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

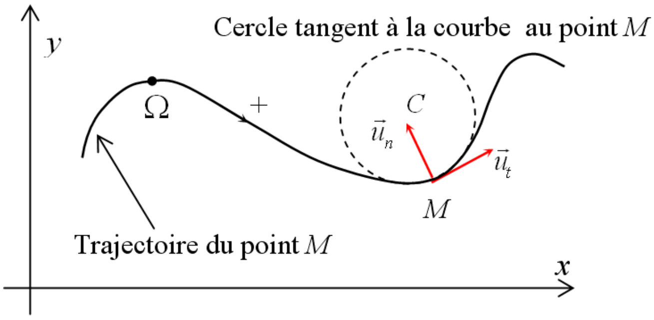
Les **vecteurs de base** sont les vecteurs unitaires $\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_\varphi}}$:

- $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire qui dirige $\overrightarrow{OM}$,
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est le vecteur unitaire appartenant au plan formé par l'axe Oz et $\overrightarrow{OM}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$, dans le sens des θ croissants.
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$et $\overrightarrow{u_\theta}$, dans le sens des φ croissants.

Vecteur position : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\,(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$

3.4 Abscisse curviligne et base de Frenet

Supposons que l'on connaisse la courbe sur laquelle se déplace le point M. Dans ce cas, la connaissance de la distance à laquelle se trouve M d'un point particulier de la courbe suffit à repérer ce point. Pour cela, on commence par orienter la courbe, c'est-à-dire que l'on définit arbitrairement un sens positif. Ensuite, on choisit un point particulier sur la courbe que nous noterons Ω.
Enfin, on définit la **distance curviligne $s(t)$** comme étant la mesure algébrique de la distance d'arc $\widehat{\Omega M}(t)$ le long de la trajectoire. Munis de Ω, de la courbe et de $s(t)$, nous sommes capables de repérer le point M à chaque instant t.



Le repère de Frenet a pour origine le point M(t) et pour base orthonormée $(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n})$. Cette base mobile est construite de la façon suivante :

- On définit arbitrairement, un sens positif le long de la trajectoire ;
- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$, dit ***vecteur tangent*** est, comme son nom l'indique, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens positif ;
- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_n}$, dit ***vecteur normal***, est quant à lui perpendiculaire à $\overrightarrow{u_t}$ et orienté dans le sens de la concavité de la trajectoire (vers le centre du cercle localement tangent à la trajectoire dit cercle osculateur)

3.5 Choix du système de coordonnées

Le choix du système de coordonnées dépend des symétries du problème et des paramètres que l'on cherche à déterminer.

- *Un système ne possédant pas de symétrie particulière sera décrit en général avec des coordonnées cartésiennes.*
- *Un système possédant une symétrie axiale sera généralement étudié avec des coordonnées cylindriques.*
- *Un système possédant une symétrie centrale sera généralement étudié avec des coordonnées sphériques.*

4. Equations horaires et trajectoire

Considérons un point M en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

Les équations horaires sont les équations qui permettent de repérer le point M à chaque instant t dans le référentiel $\mathcal{R}$: ce sont les coordonnées en fonction du temps.

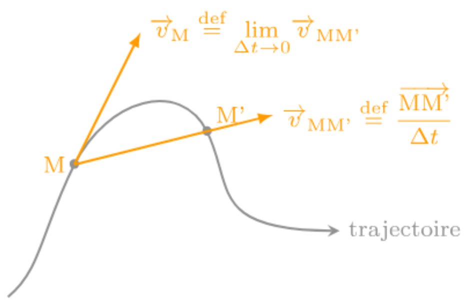
La trajectoire d'un point M par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est l'ensemble des positions successives occupées par le point M.

La relation entre les coordonnées ne faisant pas intervenir explicitement le temps est **l'équation de la trajectoire.**

III. Vecteurs vitesse et accélérations

1. Vecteur vitesse

On étudie un point entre les instants t et t+Δt.
Si l'on note M, la position du point à l'instant t et M' sa position à l'instant $t + \Delta t$, alors on peut définir un vecteur vitesse moyenne correspondant au trajet :



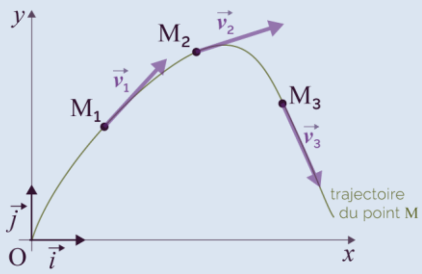
$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}.$$

Si on fait tendre Δt vers 0, on aboutit à la notion de dérivée.

Le vecteur vitesse du point M à l'instant t par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée de son vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

Il est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

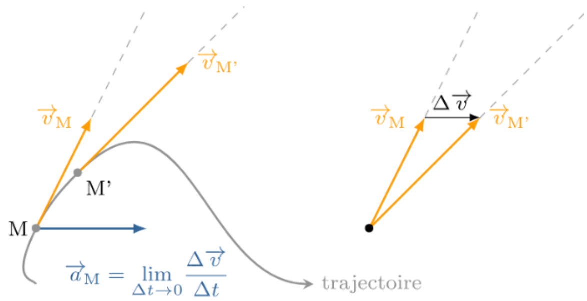


La norme du vecteur vitesse, que nous appellerons vitesse, se mesure en m.s^{-1}.

2. Vecteur accélération

Le vecteur accélération est une grandeur d'évolution qui mesure la variation du vecteur vitesse, en norme et en direction.

On note M la position du point à l'instant t et M' sa position à l'instant $t + \Delta t$, alors on peut définir un vecteur accélération moyenne correspondant au trajet :



$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$

Le vecteur accélération du point M à l'instant t par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée de son vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

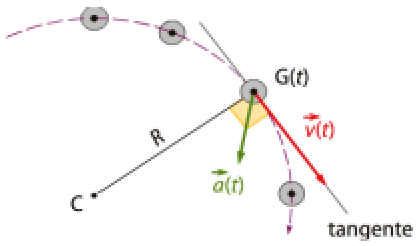
La norme du vecteur accélération, que nous appellerons accélération, se mesure en m.s⁻².

Remarque : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\frac{d(\vec{v}_{M/\mathcal{R}})^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|^2}{dt}$

- **Cas d'un mouvement accéléré** :

La norme du vecteur vitesse augmente donc :

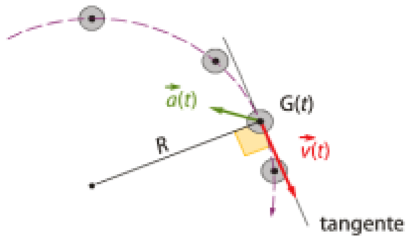
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} > 0$$



- **Cas d'un mouvement décéléré :**

La norme du vecteur vitesse diminue donc :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} < 0$$

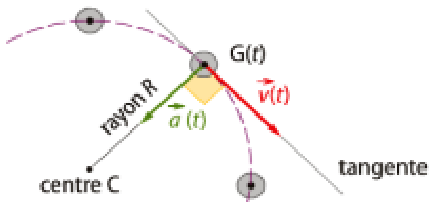


- **Cas d'un mouvement uniforme :**

La norme du vecteur vitesse est constante donc :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = 0 : \vec{a}_{M/\mathcal{R}} \perp \vec{v}_{M/\mathcal{R}}.$$

L'existence du vecteur accélération traduit le changement de direction du vecteur vitesse.



Il existe un vecteur accélération non nul, du moment où le vecteur vitesse varie, que ce soit par sa norme, sa direction ou son sens.

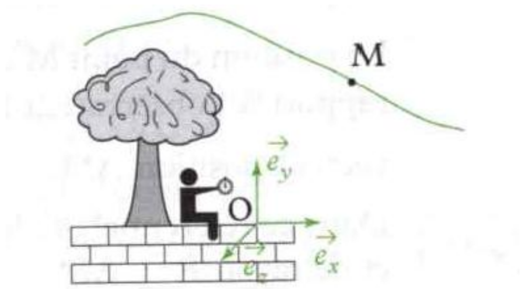
Dans le cas d'une trajectoire courbe, le vecteur accélération existe toujours et est orienté dans le sens de la concavité de la trajectoire.

Les vecteurs position, vitesse, accélération sont **définis pour un référentiel ($\mathcal{R}$)** dans lequel on observe le mouvement, mais peuvent être **exprimés dans différentes bases.**
Le référentiel c'est « par rapport à quoi on étudie le mouvement », le repère c'est un choix mathématique d'un système de coordonnées pour exprimer le plus simplement possible, en fonction des symétries du problème, les vecteurs.

Intéressons-nous donc maintenant à l'expression de ces vecteurs dans différents repères.

IV. Etude d'un mouvement en coordonnées cartésiennes

On étudie le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel la base cartésienne est fixe.



Référentiel $\mathcal{R}$ $(O\,;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z},t)$ lié à l'observateur

1. Vecteur vitesse

La base cartésienne $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ étant fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée du vecteur position dans ce système de coordonnées est simple : il suffit de dériver les composantes du vecteur position.

Le vecteur vitesse s'écrit : $\boldsymbol{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$

2. Vecteur accélération

De la même façon, la dérivée du vecteur vitesse dans ce système de coordonnées est simple : il suffit de dériver les composantes du vecteur vitesse.

Le vecteur accélération s'écrit : $\boldsymbol{\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$

✍ ***AP 1***

3. Mouvement rectiligne

3.1 Généralités

Un mouvement rectiligne est un mouvement qui s'effectue le long d'une ligne droite.

Au cours d'un tel mouvement, **les vecteurs vitesse et accélération sont portés par la trajectoire** : ils conservent donc leur direction.

Le mouvement peut être entièrement décrit par **un seul paramètre** : on choisit par simplicité, une coordonnée cartésienne dont l'axe supporte la trajectoire et si possible orienté dans le sens du mouvement.

Pour la suite, on étudie un mouvement selon l'axe Ox dans le sens des x croissants. Ainsi :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} \qquad \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} \qquad \vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$$

3.2 Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement est rectiligne et uniforme lorsque la trajectoire est une portion de droite et la valeur de la vitesse est constante. Le vecteur vitesse a toujours même direction, même sens et même valeur : il est constant. Le vecteur accélération est donc nul.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \overrightarrow{constante} \quad et \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{0}$$

Equation horaire :

On note v_0 la vitesse du point M et x_0 la condition initiale x(0).

$$\dot{x}(t) = v_0 = constante$$
$$x(t) = v_0 t + x_0$$

3.3 Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement est rectiligne et uniformément varié lorsque la trajectoire est une portion de droite et que la valeur de l'accélération est constante. Le vecteur accélération a donc toujours même direction, même sens et même valeur : il est constant.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \overrightarrow{constante}$$

Equation horaire :

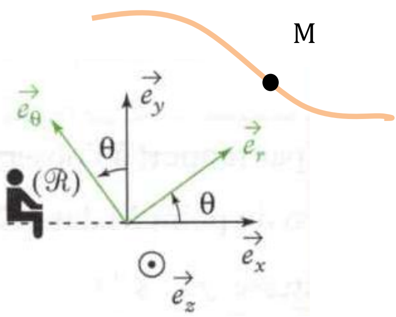
On note a_0 la composante du vecteur accélération du point M. *a_0 est positive si le mouvement est accéléré, négative s'il est décéléré.*
On note également v_0 la vitesse initiale du point M et x_0 la condition initiale x(0).

$$\ddot{x}(t) = a_0 = constante$$
$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

V. Etude d'un mouvement en coordonnées cylindriques

On étudie toujours le mouvement de M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel la base cartésienne est fixe.

1. Vecteur vitesse



La direction des vecteurs $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$ dépendent de la position du point M ***: la base cylindrique est mobile dans le référentiel $\mathcal{R}$.***

La dérivée du vecteur position dans ce système de coordonnées nécessite de dériver les vecteurs unitaires en plus des composantes du vecteur position.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + r\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z}$$

$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\ \vec{u}_x + \sin\theta\ \vec{u}_y \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\ \vec{u}_x + \cos\theta\ \vec{u}_y$

$\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\sin\theta\ \vec{u}_x + \dot{\theta}\cos\theta\ \vec{u}_y = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

$\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\cos\theta\ \vec{u}_x - \dot{\theta}\ \sin\theta\ \vec{u}_y = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$ (utile pour la suite)

$$\boldsymbol{\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}} \qquad \boldsymbol{\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}}$$

Le vecteur vitesse s'écrit : $\boldsymbol{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$

2. Vecteur accélération

De la même façon, la dérivée du vecteur vitesse dans ce système de coordonnées nécessite de dériver les vecteurs unitaires en plus des composantes du vecteur vitesse.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d\dot{r}}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{d\dot{z}}{dt}\,\overrightarrow{u_z}$$

Le vecteur accélération s'écrit : $\boldsymbol{\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$

AP 2

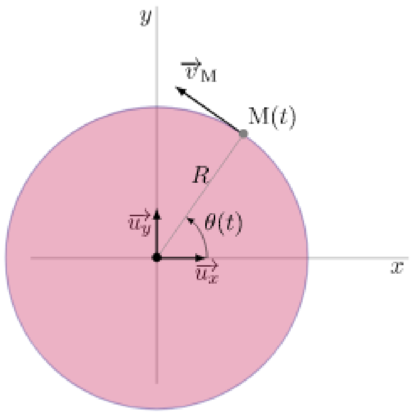
3. Mouvement circulaire

3.1 Généralités

Un mouvement circulaire est un mouvement dont la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle.

Au cours d'un tel mouvement, **les vecteurs vitesse et accélération changent de direction**.

Le mouvement peut être entièrement décrit par **un seul paramètre angulaire** si on choisit les coordonnées polaires. On note O le centre du cercle et R le rayon du cercle. Au cours du mouvement seul l'angle θ varie.



$$\overrightarrow{OM}(t) = R\,\overrightarrow{u_r}$$

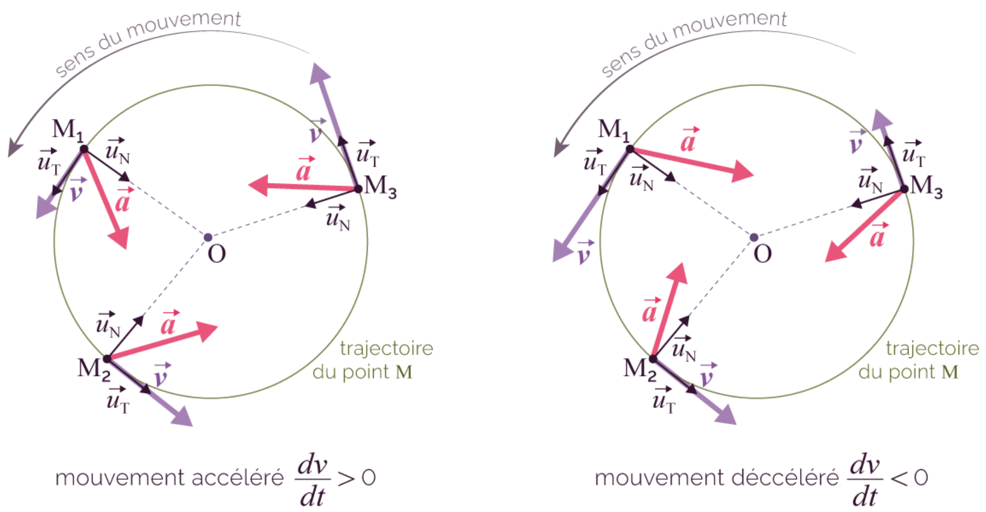
$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = -R\dot{\theta}^{\,2}\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

où $v = R\dot{\theta}$, composante du vecteur vitesse

Interprétation du vecteur accélération :

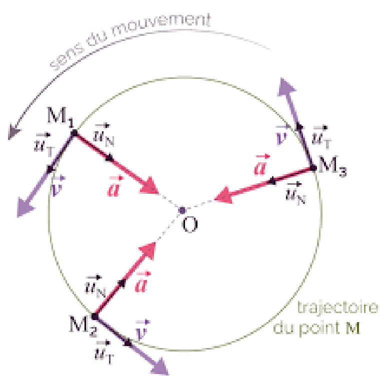
- La **composante normale ou radiale**, selon $\overrightarrow{u_r}$, existe toujours et est orientée vers le centre du cercle. **Elle traduit la courbure de la trajectoire et** donc la variation de la direction du vecteur vitesse.
- La **composante tangentielle**, selon $\overrightarrow{u_\theta}$, existe si la vitesse varie au cours du mouvement : son existence traduit la **variation de la norme du vecteur vitesse** durant le mouvement.



3.2 Mouvement circulaire uniforme

$$\|\vec{v}\| = constante \qquad \dot{\theta} = constante$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = -R\dot{\theta}^{\,2}\,\overrightarrow{u_r} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$



L'accélération d'un mouvement circulaire n'est jamais nulle : même dans le cas uniforme !
La composante radiale de l'accélération est toujours non nulle et orientée vers le centre de la trajectoire.

3.3 Mouvement courbe quelconque

Un tel mouvement s'étudie plutôt dans la base de Frenet :

$$\textbf{\textit{Vecteur vitesse :}}\ \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{u_t}$$

Concernant le vecteur accélération on admet que les résultats obtenus pour un mouvement circulaire se généralisent à une courbe quelconque en remplaçant de rayon R par le rayon de courbure ρ de la trajectoire au point considéré.

$$\textbf{\textit{Vecteur accélération :}}\ \vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{u_n} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t}$$

L' accélération a donc là aussi une composante tangentielle qui dépend de la variation de la norme de la vitesse, et une composante normale qui correspond aux variations de direction.

Applications

Application 1 : Ballon sonde

On étudie le mouvement d'un ballon-sonde dans le référentiel lié à la Terre. Le ballon-sonde M, lâché au niveau du sol, s'élève avec une vitesse verticale constante de norme v_0. Le vent lui communique un mouvement horizontal de direction et de sens constants et de norme proportionnelle à l'altitude z du ballon tel que $x = z\,\frac{t}{\tau}$, où τ est un temps caractéristique.

1) Donner l'expression des coordonnées cartésiennes x(t) et z(t) du ballon.
2) Donner l'expression du vecteur vitesse du ballon.
3) Donner l'expression du vecteur accélération du ballon.

Application 2 : Enfant sur un manège

Soit un enfant assimilé à un point M assis sur un manège. Il se trouve à une distance R de l'axe de rotation du manège sur un cheval de bois qui oscille autour d'une hauteur moyenne h_0 avec une pulsation $4\omega_0$ et d'une amplitude h_1.
ω_0 est la vitesse angulaire du manège.

1) Donner l'expression des coordonnées cylindriques r(t), θ(t) et z(t) de l'enfant.
2) Donner l'expression du vecteur vitesse de l'enfant.
3) Donner l'expression du vecteur accélération de l'enfant.