Chapitre 12

Dynamique du point matériel

Isaac Newton observant une pomme tomber au sol alors qu'il est assis sous un arbre.

Le cours

La dynamique est l'étude du mouvement d'un corps en relation avec les causes qui le produisent : les forces.

I. Quantité de mouvement

1. Quantité de mouvement d'un point matériel

La quantité d'un mouvement d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$ est égale au produit de sa masse par son vecteur vitesse dans ce référentiel :

$$\vec{p}(M) = m\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

2. Quantité de mouvement d'un système

On considère un système discret composé de N points matériels M_i de masses m_i :

$$\vec{p}(système) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}(M_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d(m_i\overrightarrow{OM_i})}{dt} = \frac{d(\sum_{i=1}^{N}(m_i\overrightarrow{OM_i}))}{dt}$$

On rappelle l'expression du barycentre G d'un tel système : $\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N}(m_i\overrightarrow{OM_i})$

Ainsi : $\vec{p}(système) = \frac{d\left(\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\overrightarrow{OG}\right)}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$

La quantité de mouvement du solide est la somme de toutes les quantités de mouvement de toutes ces petites masses et est égale à la quantité de mouvement du centre de masse G, affecté de la masse totale M du système.

$$\vec{p}(système) = M\,\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

Cette relation reste valable pour un système continu tel que le solide.

II. Forces

1. Définition et modélisation

Une action mécanique exercée sur un objet et susceptible d'en modifier le mouvement est appelée force.

Une force se modélise à l'aide d'un **vecteur** dont :

- La norme représente l'intensité de la force en Newton (N),
- La direction représente la direction de la force,
- Le sens représente le sens de la force,
- L'origine est le point d'application de la force (*Dans ce chapitre et le suivant, nous étudierons des systèmes assimilés à des points matériels. Toutes les forces s'exerceront donc en un seul et même point.)*

Si le système extérieur exerce une force sur un objet en étant en contact avec lui, on parle de **force de contact.** *Exemples : réaction du support, frottement, tension d'un fil, force de rappel d'un ressort...*
Si le système extérieur exerce une force sur un objet sans être en contact avec lui, on parle de **force à distance**. *Exemples : poids d'un corps et plus généralement la force de gravitation, force électromagnétique...*

2. Résultante des forces

Les forces possèdent les propriétés des vecteurs, et plus particulièrement leur **caractère additif** : un système ponctuel soumis à plusieurs forces $\vec{F_i}$ peut se résumer en un système ponctuel soumis à une force appelée résultante des forces $\vec{F}$ telle que $\boldsymbol{\vec{F}} = \sum \boldsymbol{\vec{F_i}}$.

Un système **isolé** n'est soumis à aucune force $\left(\vec{F_i} = \vec{0}\ \forall\, i\right)$.

Un système **pseudo-isolé** est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle $\left(\vec{F} = \sum \vec{F_i} = \vec{0}\right)$.

III. Lois de Newton

1. 1ère loi de Newton : le principe d'inertie

1.1 Enoncé

Il existe une classe de référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, par rapport auxquels tout point matériel isolé est en mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Cette loi postule l'existence des référentiels galiléens.

1.2 Référentiels galiléens

Un référentiel est dit galiléen si le principe d'inertie y est vérifié.

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Le caractère galiléen étant lié à la validité du principe d'inertie, il est tributaire de la précision avec laquelle on procède à cette vérification. Ainsi, nous ne connaissons pas de référentiels *absolument* galiléens mais seulement des référentiels *approximativement galiléens* sur une certaine échelle de temps.

Un référentiel est supposé galiléen si sur une échelle de temps donnée (typiquement la durée de l'expérience), un système isolé ou pseudo–isolé perdure dans son mouvement rectiligne uniforme.

Exemples :

- *Meilleure approximation : Référentiel de Copernic (centre = centre de masse du système solaire, axes vers 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes).*

- *Référentiel géocentrique (centre = centre de masse de la Terre, axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic) : bonne approximation à condition de négliger l'effet des autres astres que la Terre.*

- ***Référentiel terrestre (lié au sol terrestre) : bonne approximation à condition de négliger les effets dus à la rotation de la Terre.*** *En effet, le référentiel terrestre ne peut être supposé galiléen* *lorsque l'on étudie le pendule de Foucault (rotation du plan d'oscillation) ou la déviation vers l'est observé lors d'une chute libre.*

2. 2ème loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à un ensemble de forces extérieures de résultante $\overrightarrow{F_{ext}}$ est tel que :

$$m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

Ce qui peut également s'écrire : $\frac{d\,\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}$

Une force exercée sur un objet modifie son vecteur vitesse.

Pour modifier le mouvement d'un objet, il faut exercer une action mécanique et cela d'autant plus que l'objet est lourd. La masse apparaît donc comme étant la grandeur qui caractérise l'inertie de l'objet (sa capacité à s'opposer à toute modification de son mouvement). On parle de masse inertielle. C'est une grandeur scalaire positive et additive, qui s'exprime en kg.

Le principe d'inertie établit une définition finalement très théorique de ce qu'est un référentiel galiléen. On considèrera, pour une expérience donnée, qu'un référentiel est galiléen si la 2ème loi de Newton s'y applique pendant toute la durée de l'expérience.

3. 3ème loi de newton : principe des actions réciproques

Si le point matériel M$_1$ exerce sur le point M$_2$ une force $\overrightarrow{F_{M1\to M2}}$ alors M$_2$ exerce sur M$_1$ la force opposée : $\overrightarrow{F_{M2\to M1}} = -\overrightarrow{F_{M1\to M2}}$.

4. Application de la deuxième loi de Newton à un système de N points matériels : théorème de la quantité de mouvement

Soit un système de masse M, constitué de N points matériels de masse m_i, soumis à un ensemble de force extérieures de résultante $\overrightarrow{F_{ext}}$.

On distingue dans le bilan des forces les forces extérieures et les forces intérieures que subit chaque point matériel de la part des autres points du système. On applique le PFD à chaque point et on somme :

$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_{M_i/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{G/\mathcal{R}}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} + \sum_{j\neq i} \overrightarrow{F_{j\to i}}$ $or \sum_{j\neq i} \overrightarrow{F_{j\to i}} = \vec{0}\ car\ \overrightarrow{F_{j\to i}} = -\overrightarrow{F_{i\to j}}$ en vertu de la 3ème loi de Newton.

Par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le mouvement du centre de masse d'un système de masse M soumis à un ensemble de forces extérieures de résultante $\overrightarrow{F_{ext}}$ est tel que :

$$M\,\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

Remarque : Une position est une position d'équilibre si $\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ en cette position. Un système est à l'équilibre s'il est dans une position d'équilibre et qu'il y est immobile. *Cette notion sera développée dans le chapitre suivant.*

IV. Résolution d'un problème mécanique avec le PFD

1. Méthode (voir FM 11)

Déterminer les équations différentielles du mouvement :

- **Définir le système étudié** : objet assimilé à un point matériel M de masse m.
- Choisir un **référentiel** d'étude **galiléen**
- Choisir la **base de projection adaptée au problème** : c'est celle qui facilite la description du mouvement. *Faire un schéma clair et de taille suffisante sur lequel vous représentez le système et la base choisie. Introduire les notations nécessaires associées aux grandeurs utiles.*
- Faire un **bilan complet des forces** qui s'exercent sur M. *Les nommer et en donner leurs expressions. Représenter toutes les forces sur le schéma précédent.*
- Ecrire le **PFD**.
- **Projeter le PFD** dans la base choisie.

Déterminer les équations horaires :

Résoudre les équations différentielles du mouvement. On détermine les constantes avec les CI.

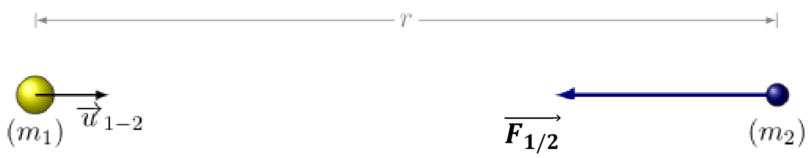
Déterminer l'équation d'une trajectoire :

A partir des équations horaires, on élimine le paramètre temps.

2. Forces à connaître

2.1 Force de gravitation et poids d'un corps

La force de gravitation est la force d'attraction s'exerçant entre deux corps massifs.



La force de gravitation exercée par un point matériel M_1 de masse m_1 sur un point matériel M_2 de masse m_2 est :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{1/2}}.$$

G est la constante de gravitation universelle : G = 6.67 x 10^{-11} N.m^{2}kg^{-2}

Tout corps au voisinage de la Terre subit la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

On montre que tout se passe comme si la masse totale de la Terre M_T =5,972.10^{24} kg se trouvait concentrée en son centre T, située à R_T =6371 km de la surface, la norme de la force de gravitation s'exerçant sur un corps de masse m située à une altitude h au-dessus du sol s'écrit :

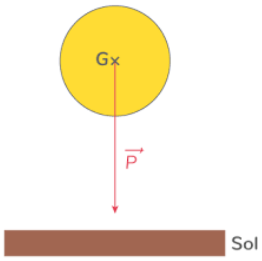
$$\left\|\overrightarrow{F_{\mathrm{Terre/M}}}\right\| = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

$$Si\ h \ll R_T : \left\|\overrightarrow{F_{Terre/M}}\right\| = G\frac{M_T m}{{R_T}^2} = m\ g\ où\ g =\ G\ \frac{M_T}{{R_T}^2} = 9.819\ m.s^{-2}$$

Au voisinage de la surface de la Terre, un point matériel M de masse m subit une force d'attraction, verticale descendante, liée à la force de gravitation exercée par la Terre, appelée poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

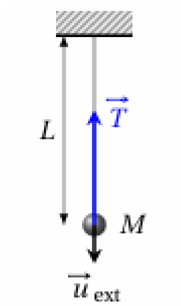
$\vec{g}$ est le champ de pesanteur terrestre de norme g = 9.81 m.s^{-2}, dirigé selon la verticale du lieu.



Le champ de pesanteur sera supposé uniforme. *En réalité, l'accélération de pesanteur inclue également une composante inertielle (due à la rotation de la Terre).*

Le poids s'applique au centre de masse du système étudié.

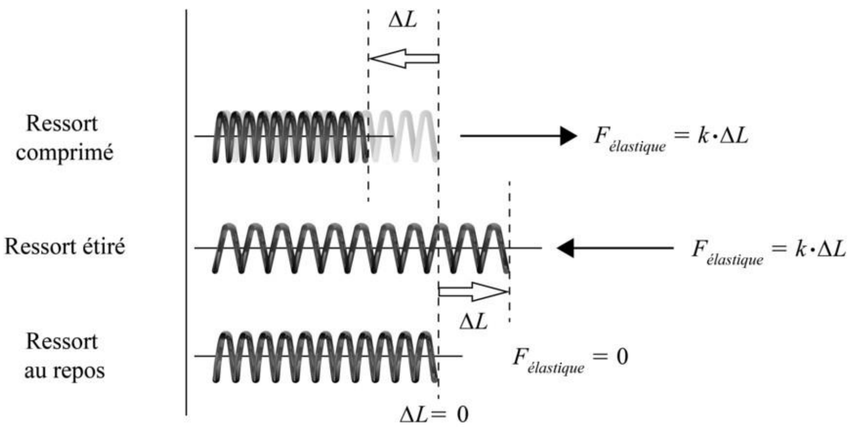
2.2 Tension du fil



C'est la force de contact subie par un point matériel accroché à un fil inextensible, **s'appliquant au point d'attache du fil, dirigée le long du fil, orienté de l'objet vers le fil** et de norme à priori inconnue, qui des dépend des autres forces.

Cas d'un fil sur une poulie : la tension du fil est la même de part et d' autre de la poulie si celle-ci est supposée idéale.

2.3 Force de rappel élastique



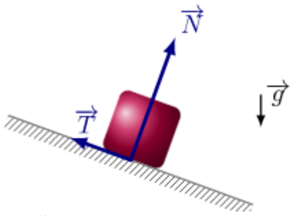
Dans l'hypothèse d'une faible déformation, la force exercée par un ressort sur un objet est proportionnelle à sa déformation (**loi de Hooke**). Son sens dépend du sens de la déformation : cette force, dite de rappel, a tendance, dans la limite de l'élasticité du ressort, à ramener le ressort à sa longueur à vide.

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

$\vec{u}$: orienté dans le sens d'allongement du ressort.
l_0 : longueur à vide du ressort
k : constante de raideur du ressort (en $N.m^{-1}$)

2.4 Réaction du support

Force exercée par un support sur un point matériel M lorsque celui-ci est astreint à se déplacer sur ce support.



On la décompose en 2 termes : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

- **$\vec{N}$ est la réaction normale, elle est perpendiculaire au support et est dirigée du support vers l'objet assimilé au point matériel.**

- **$\vec{T}$ est la réaction tangentielle ou force de frottement solide, elle est tangente au support en M et s'oppose au mouvement.**

Lois de Coulomb :

Cas de non de glissement (adhérence) : $\|\vec{T}\| \leq \mu_s\|\vec{N}\|$,$\mu_s$: coefficient de frottement statique.

Cas de glissement : $\|\vec{T}\| = \mu_D\|\vec{N}\|$, μ_D : coefficient de frottement dynamique.

μ_D est légèrement inférieur à μ_s

Matériaux	μ_s	μ_c
Acier sur glace	0.1	0.05
Acier sur acier, sec	0.6	0.4
Acier sur acier, lubrifié	0.1	0.05
Bois sur bois	0.5	0.3
Téflon sur acier	0.04	0.04
Chaussures sur glace	0.1	0.05
Bottes de montagne sur rocher	1.0	0.8
Pneus de voiture sur béton sec	1.0	0.7
Caoutchouc sur asphalte	0.6	0.4

- *Tant que le point matériel soumis au frottement reste **immobile**, on a* $\|\vec{T}\| \leq \mu_s\|\vec{N}\|$
- *Le cas de l'égalité est obtenu lorsqu'on se trouve à la limite entre l'adhérence et le glissement,* $\|\vec{T}\| = \mu_s\|\vec{N}\|$
- *Dès que le point matériel se met en mouvement, on a* $\|\vec{T}\| = \mu_D\|\vec{N}\|$.

2.5 Forces de frottements dans un fluide

Lorsqu'un corps est en mouvement relatif dans un fluide, les collisions avec les molécules qui composent le fluide sont source de deux forces :

✓ La traînée qui s'oppose au mouvement du mobile par rapport au fluide. Elle augmente avec la vitesse.
✓ La portance qui est perpendiculaire au mouvement du mobile.

Ces forces seront données dans les énoncés.

Concernant la force de frottement fluide :

- On utilise souvent le **modèle linéaire,** applicable dans le cas de faibles vitesses de déplacement et de fluides très visqueux :

$$\vec{f} = -\alpha\, \overrightarrow{v_{M/fluide}}$$

- On rencontre aussi le **modèle quadratique** (vitesses de déplacement plus élevées et fluide peu visqueux) :

$$\vec{f} = -h \left\|\overrightarrow{v_{M/fluide}}\right\| \overrightarrow{v_{M/fluide}}$$

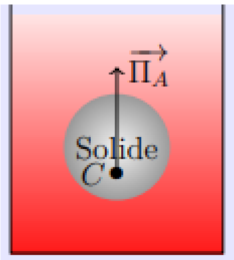
α et h étant des coefficients constants.

2.6 Poussée d'Archimède

Tout corps immergé dans un fluide au repos est soumis de la part du fluide à une poussée verticale, appelée poussée d'Archimède, dirigée vers le haut, d'intensité égale au poids du volume de fluide déplacé et appliquée au centre de masse de ce fluide.

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{fluide} V_{immerg\acute{e}} \vec{g}$$

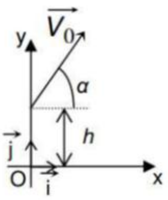
$V_{immerg\acute{e}}$ est le volume de corps immergé et ρ_{fluide} la masse volumique du fluide.



La poussée d'Archimède peut être négligée devant le poids lorsque la masse volumique du fluide est négligeable devant la masse volumique du système (exemple : chute d'un objet dans l'air).

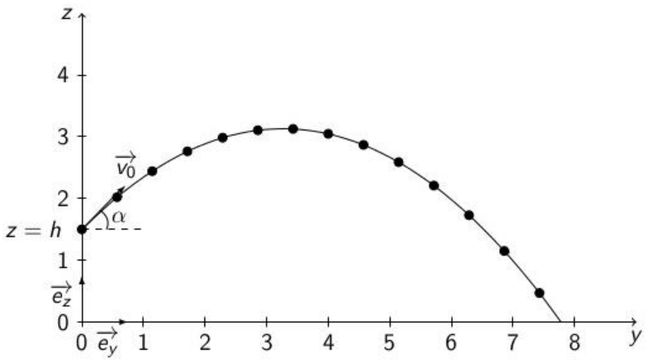
3. Exemple 1 : tir balistique

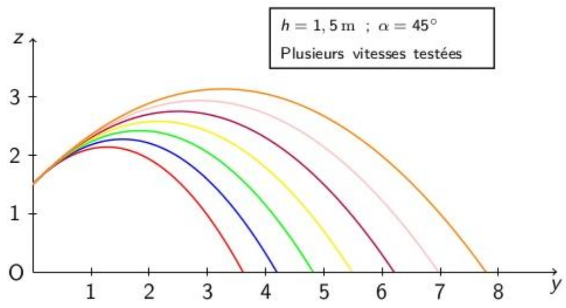
On considère un projectile de masse m tiré dans le champ de pesanteur uniforme à la date $t = 0$ à une hauteur h du sol. Le vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ est contenu dans le plan vertical (Oyz) et fait un angle **α.**

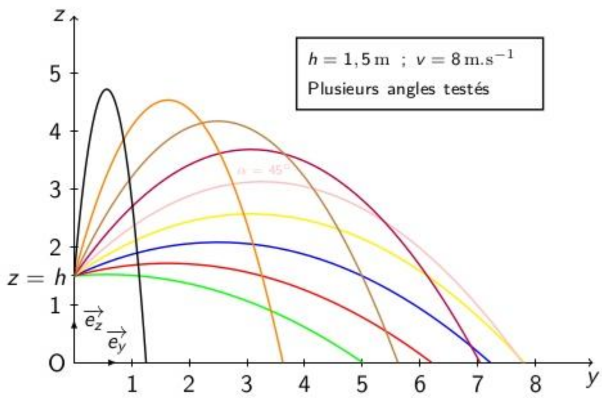


Déterminer les équations horaires puis l'équation de la trajectoire.

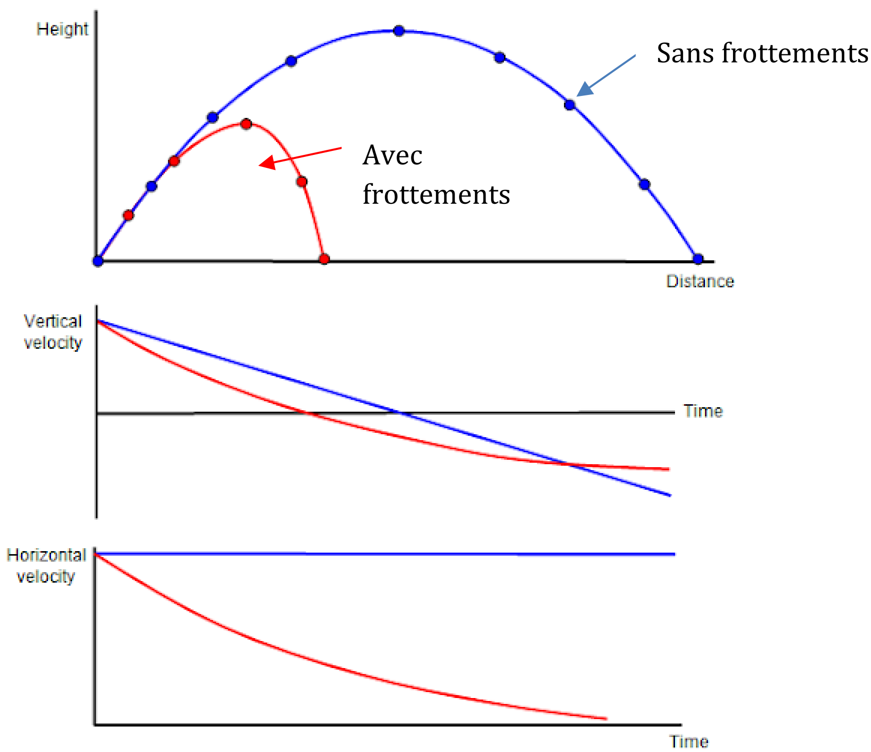
<u>Tracés de trajectoires :</u>





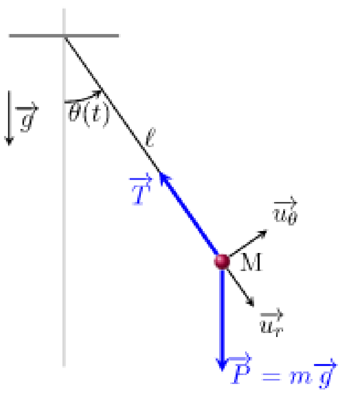


<u>Remarque :</u> tracés sans et avec frottements (pour h = 0)



4. Exemple 2 : le pendule simple

On étudie une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l. On néglige les frottements de l'air. La masse est écartée de la verticale d'un angle θ_0 et est lâchée sans vitesse initiale.

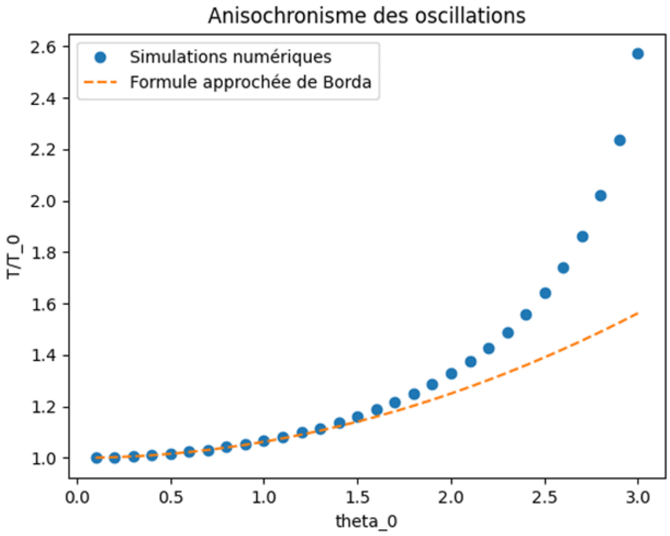


1) Etablir l'équation différentielle de la trajectoire.
2) La résoudre dans l'hypothèse des petits angles.

Etude de la période en fonction de l'amplitude des oscillations :

On note T_0 la période propre du pendule dans l'hypothèse des petits angles. T dépend de l'amplitude : il y a anisochronisme.

Formule approchée de Borda : $T \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$ (valable pour des angles pas trop grands, typiquement inférieur à 60°).



Cependant, on observe un isochronisme des petites oscillations (pour des petits angles, T indépendante de θ_{max}).

(Voir TP 15)