TD 12 - Dynamique du point matériel

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Etablir et utiliser les expressions des vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
→ Choisir le système de coordonnée le plus adapté à l'étude d'un mouvement.
→ Savoir étudier les cas suivants : mouvement à vecteur accélération constant, mouvement circulaire.
→ Etablir le bilan des forces sur un ou plusieurs systèmes et savoir les représenter sur un schéma.
→ Savoir projeter une relation vectorielle.
→ Connaître et savoir appliquer les lois de Newton.
→ Savoir étudier le mouvement dans le champ de pesanteur avec ou sans frottement.
→ Influence de la résistance de l'air : exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement afin de déterminer la vitesse limite.
→ Etablir l'équation du mouvement du pendule simple, non isochronisme des oscillations, approximation linéaire.

J'apprends mon cours : *Questions de cours, exercices 1, 2, 3*

Questions de cours

Q1. Enoncer les lois de Newton.
Q2. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme : mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.
Q3. Pendule simple : établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
Q4. Expression des forces suivantes : interaction gravitationnelle et coulombienne, poids, force de rappel élastique, réaction du support (et lois de Coulomb), poussée d'Archimède.

Exercices

Le référentiel terrestre est supposé galiléen et en l'absence de données, l'intensité du champ de pesanteur g = 9.81m.s^{-2}.

Exercice 1 : Propriétés mécaniques du verre ♥ ★☆☆

Ref. 0091

✓ *Lois de Coulomb*
✓ *Réaction du support*

On se propose de mesurer le coefficient de frottement du verre sur le verre, noté μ. Pour cela, on dispose d'une grande vitre plane et d'un petit morceau de verre parallélépipédique de masse m. On pose le petit morceau de verre sur la vitre initialement horizontale et on incline doucement la vitre. On notera α l'angle que fait la vitre avec l'horizontale.

1) En supposant que le petit morceau de verre soit immobile, exprimer les composantes normale et tangentielle de la réaction en fonction de la masse m du petit morceau de verre, de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.
2) En déduire une condition sur l'angle α et sur le coefficient de frottement μ pour que le petit morceau de verre ne glisse pas.
3) Expérimentalement, on remarque que pour $\alpha \geq 35°$ le petit morceau de verre se met à glisser. En déduire la valeur de μ.
4) On suppose que $\alpha > 35°$. Etablir l'équation horaire du mouvement.

Exercice 2 : Equilibre d'un iceberg

★☆☆
Ref. 0092

✓ *Poussée d'Archimède*

Un iceberg a un volume émergé V_e= 600 m^3. Sa masse volumique est ρ_1 = 910 kg.m^{-3}, celle de l'eau de mer est ρ_2 = 1024 kg.m^{-3} .

1) Schématiser l'iceberg flottant et préciser les forces auxquelles il est soumis lorsqu'il est à l'équilibre.
2) Trouver une relation entre le volume émergé V_e, volume total V_t et les masses volumiques.
3) Calculer le volume V_t et la masse de l'iceberg.

Exercice 3 : Tir au panier ♥

★★☆
Ref. 0093

✓ *Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme*

Un basketteur veut marquer trois points en envoyant la balle dans un panier situé à une hauteur de H = 3 m depuis une ligne située à L = 6 m de celui-ci. Le lancer se fait à une hauteur h = 2 m par rapport au sol. On souhaite trouver la relation entre l'angle de tir α et la norme v_0 de la vitesse au lancer pour réussir le panier. Pour simplifier, on assimilera le ballon par un point matériel de masse m devant passer exactement au centre C du cercle métallique. On néglige toutes les actions dues à l'air. L'accélération de pesanteur est g = 9.81 m.s^{-2}.

1) Dans un repère que vous aurez au préalable choisi, établir les équations horaires du ballon.
2) Etablir l'équation de la trajectoire du ballon.
3) Quelle est l'altitude maximale atteinte par le ballon ?
4) On souhaite déterminer l'angle α permettant de marquer pour une vitesse v_0 donnée. Déterminer l'équation vérifiée par α. La résoudre pour $v_0 = 10\ m.s^{-1}$.

Exercice 4 : Saut en parachute ♥

★☆☆
Ref. 0094

- ✓ *Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme*
- ✓ *Frottements linéaires*

Un parachutiste de masse $m = 70\ kg$ se laisse tomber d'un hélicoptère en vol stationnaire, modélisé par un point O et situé à une altitude de 4 km au-dessus du sol. L'accélération de pesanteur est $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$. On étudie le mouvement selon la verticale descendante Oz.

1) Il effectue tout d'abord une chute libre sans frottements pendant une durée de 10 secondes. Quelle est la vitesse v_1 atteinte au bout des 10 s ?
2) A la fin de la chute libre, le parachutiste ouvre son parachute pour continuer sa descente. On suppose que la force exercée par la résistance de l'air sur le parachute est linéaire : $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ où $k = 70\ kg.s^{-1}$. On posera $\tau = \dfrac{m}{k}$.
   a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$.
   b) Résoudre.
   c) Déterminer la vitesse limite du parachutiste.
   d) Donner l'allure générale de la vitesse au cours du temps.
   e) Evaluer au bout de combien de temps le parachutiste atteint sa vitesse limite.
   f) Compte tenu du calcul précédent, calculer très simplement la durée que met le parachutiste pour atteindre le sol à partir du saut.

Exercice 5 : Atterrissage d'un avion de chasse ♥

| ★★☆
Ref. 0095

- ✓ *Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme*
- ✓ *Frottements quadratiques*

Un avion de chasse de masse $m = 9{,}0\ t$ en panne de freins atterrit à une vitesse $v_a = 241\ km.h^{-1}$. Une fois au sol, il est freiné en secours par un parachute de diamètre $D = 3{,}0\ m$ déployé instantanément par le pilote au moment où les roues de l'avion touchent le sol. On néglige les forces de frottement des roues sur le sol par rapport à la force de traînée (frottement fluide) du parachute qui s'écrit $T = \frac{1}{2}C_x\rho S v^2$ avec v la vitesse de l'avion, S la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse, $C_x = 1{,}5$ le coefficient de traînée supposé constant, et ρ = 1,2 kg.m^{-3} la masse volumique de l'air. On considère que le réacteur ne délivre plus aucune poussée.

1) Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse v de l'avion.
2) En déduire l'expression de la vitesse v en fonction de la date t. On prendra comme origine des temps la date à laquelle les roues de l'avion touchent le sol.
3) Dans le cas où les freins fonctionnent, la distance d'atterrissage de l'avion est de l'ordre de $d = 1{,}4\ km$. Déterminer la vitesse de l'avion après avoir été freiné uniquement par le parachute sur cette distance.

Exercice 6 : Chaussette dans un sèche-linge

★☆☆
Ref. 0096

- ✓ *Mouvement circulaire*
- ✓ *Réaction du support*

Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases. Au cours d'une première phase, la chaussette est entrainée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme. Au cours d'une deuxième phase, elle retombe en chute libre.
L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce lieu.
On modélise le tambour par un cylindre de rayon R = 25 cm tournant à 50 tour.min^{-1}. On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel M de masse m.
Durant la première phase, on considère que le linge est entrainé dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour et en restant collé à ses parois.

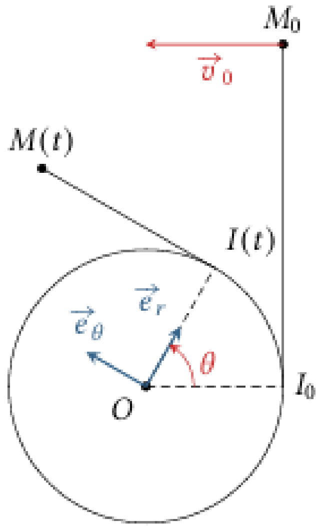
1) Faire un schéma, y faire apparaitre la base la plus adaptée à l'étude du mouvement et les forces s'appliquant sur la chaussette.
2) Appliquer le principe fondamental à la chaussette.
3) Déterminer la position angulaire θ du point où la chaussette perd le contact avec le tambour.
4) Quel est le mouvement ultérieur de la chaussette ?

Exercice 7 : Enroulement d'un fil autour d'une bobine

| ★★★
Ref. 0097

- ✓ *Tension du fil*

Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pesanteur est négligé. Le fil est tendu et M lancé dans le plan de la bobine depuis la position M_0, perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, afin d'enrouler le fil autour de la bobine. On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.



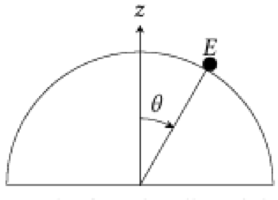
1) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base polaire en fonction de R, L et θ.
2) En déduire les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans cette base.
3) Montrer que la vitesse de M est constante. La déterminer.
4) En déduire une relation entre θ et t, puis déterminer la durée τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.
5) Etablir la loi horaire $\theta(t)$.
6) Le fil reste-t-il tendu tout au long du mouvement ?

Exercice 8 : Glissade sur un igloo ♥

★★☆
Ref. 0098

- ✓ *Mouvement circulaire*
- ✓ *Réaction du support*

Un enfant esquimau de masse m glisse sans frottement sur le toit d'un igloo de rayon R d'où il s'élance sans vitesse initiale.



1) Établir l'équation du mouvement permettant de déterminer l'angle θ.
2) Résoudre.
3) A partir de quelle valeur de θ, l'enfant décolle-t-il ?

Exercice 9 : Zébulon vieillissant ♥

★★☆
Ref. 0099

- ✓ *Force de rappel élastique*
- ✓ *Oscillateur harmonique amorti*

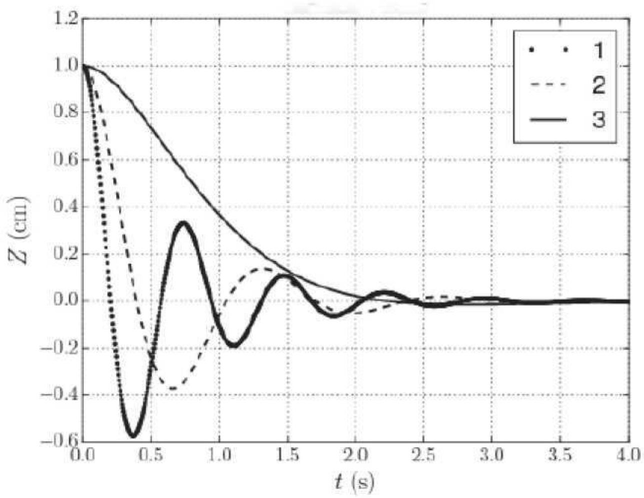
Zébulon, personnage du dessin animé « Le manège enchanté » datant des années 70, est un magicien monté sur ressort.
Dans cet exercice, on étudie un jouet Zébulon qui n'oscille plus aussi bien que lorsqu'il était neuf.

Zébulon, de masse m =0,40 kg est relié au sol par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur $k = 40$ N.m^{-1} et de longueur à vide l_0. Zébulon est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$ avec α une constante positive d'amortissement, qui n'évolue pas au fil des années.

On repère la position $z(t)$ de Zébulon grâce à un axe (Oz) vertical ascendant dont l'origine est positionnée au niveau du sol.

1) Pour l'étude du mouvement de Zébulon, préciser le système, le référentiel et le bilan des forces extérieures.
2) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ de Zébulon.
3) Mettre cette équation sous forme canonique en faisant apparaitre la position d'équilibre $z_{éq}$ de Zébulon. Préciser les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
4) Donner la solution $z(t)$ en régime pseudo-périodique. Préciser les expressions de la pseudo-pulsation Ω et de la constante de temps τ.

Les courbes ci-dessous donnent l'évolution de la variable $Z(t) = z(t) - z_{eq}$, à différentes époques, à mesure que Zébulon prend de l'âge. La courbe 1 est celle où il est le plus jeune et la courbe 3 est celle où il est le plus vieux.



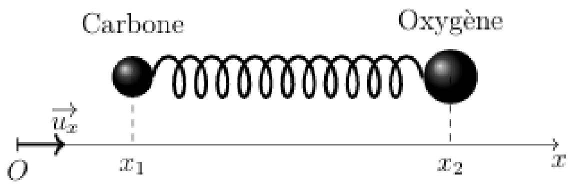
5) En comparant les courbes, conclure sur le fait que la masse m soit affectée ou non par le vieillissement de Zébulon et sur le fait que la constante de raideur k du ressort soit affectée ou non par le vieillissement de Zébulon.
6) En analysant la courbe 1, estimer la valeur du facteur de qualité Q du jeune Zébulon.
7) D'après l'expression de la force de frottements, déterminer la dimension la constante d'amortissement α. En déduire son unité dans le S.I.
8) Estimer la valeur de la constante d'amortissement α.

Exercice 10 : Oscillations d'une molécule diatomique

| ★★★
Ref. 0100

- ✓ *Oscillateur harmonique non amorti*
- ✓ *Oscillateur couplé*
- ✓ *Force de rappel élastique*

Une molécule de monoxyde de carbone CO (masses molaires : M(O) = 16 g·mol^{-1}; M(C) = 12 g·mol^{-1}) est modélisée par deux masses m_1 et m_2 mobiles sur l'axe Ox et liées par un ressort de raideur k = 1856 N·m^{-1} et longueur à vide ℓ_0. La position de l'atome de carbone (respectivement d'oxygène) est repérée par l'abscisse $x_1(t)$ (respectivement $x_2(t)$). Initialement, les deux atomes sont immobiles et leur position notées x_{10} et x_{20}.



La molécule n'est posée sur aucun support, et nous pourrons négliger le poids devant la force de rappel élastique.

1) Établir l'équation différentielle du mouvement de l'oxygène. On posera une pulsation caractéristique ω_1.
2) Établir l'équation différentielle du mouvement du carbone. On posera une pulsation caractéristique ω_2.

Ces deux équations sont couplées (le mouvement d'un atome dépend du mouvement de l'autre).

On introduit deux fonctions : $s(t) = m_1\ x_1(t)\ + m_2\ x_2(t)$ et $d(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

3) À partir des deux équations différentielles établies précédemment, établir les équations différentielles vérifiées par $s(t)$ et $d(t)$.

4) Résoudre les équations obtenues.
5) En déduire les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
6) Exprimer la période des oscillations.
7) Dans le cas où l'un des deux atomes est beaucoup plus lourd que l'autre, quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 11 : Lancer d'un boulet de canon

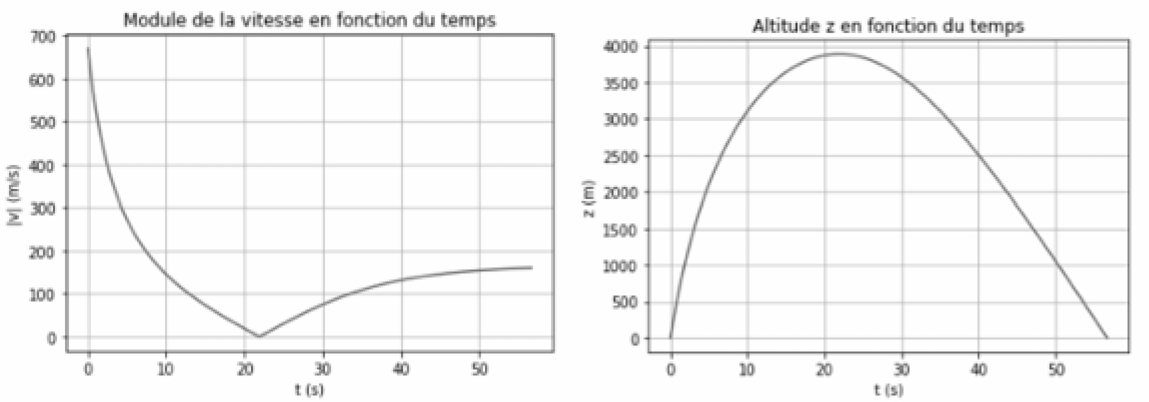
★★★
Ref. 0101

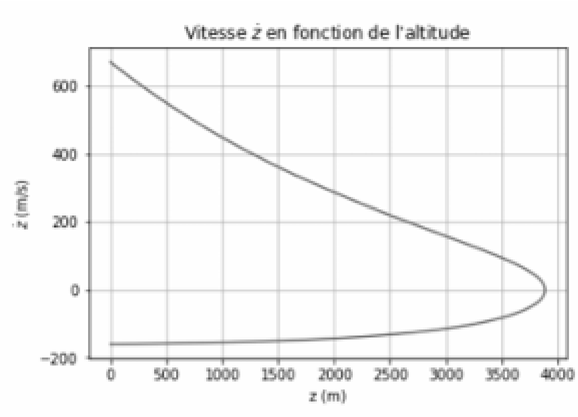
- ✓ *Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme*
- ✓ *Frottements quadratiques*

Au 18ème siècle, on étudie s'il est possible de faire quitter la Terre à un objet en le tirant verticalement. On pratique en particulier des tirs de boulets de canon.
On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.
On utilise un boulet en fonte, dit de " 24 livres", de masse $m = 12\ kg$ et de diamètre $D = 15\ cm$. La vitesse initiale communiquée par le canon au boulet peut atteindre v_0 = 680 m.s^{-1}.

On suppose que l'accélération de la pesanteur est uniforme, égale à $g = 10\ m.s^{-2}$. On étudie le mouvement du boulet tiré depuis la surface terrestre. Le boulet est assimilable à un point matériel de masse m dont on néglige la rotation propre.
On note z l'altitude sur la verticale ascendante.

Les frottements de l'air ne sont pas négligeables dans cette étude. On montre que pour des vitesses supérieures à $10\ m.s^{-1}$, la force de frottement subie par le boulet suit une loi quadratique de la forme $\vec{F} = -\gamma v \vec{v}$. La constante γ, étudiée en mécanique des fluides, dépend de la masse volumique de l'air et de la taille du boulet. L'étude numérique du problème conduit aux résultats illustrés sur les courbes ci-dessous.





Afin de faciliter l'étude, on distingue la phase ascendante de la phase descendante.

1) Écrire pour chacune des deux phases, la phase ascendante puis la phase descendante, les équations différentielles vérifiées par la vitesse v du boulet.
2) Montrer que lors de la phase descendante la vitesse tend vers une vitesse limite asymptotique v_{lim}. Est-ce le cas pour la phase ascendante ? Justifier.
3) Exprimer v_{lilm} en fonction des données du problème.

On peut attribuer à cette phase une durée caractéristique $\tau = \sqrt{\frac{m}{\gamma g}}$.

4) Quelle est la nature du mouvement lors du régime permanent descendant ?
5) Identifier sur les courbes fournies les différentes phases et régimes du mouvement.

On note v+(t) l'expression mathématique de la vitesse en fonction du temps lors de la phase ascendante et v−(t) l'expression mathématique de la vitesse en fonction du temps lors de la phase descendante.

6) À l'aide du formulaire fourni, résoudre les équations différentielles obtenues à la question 1 et exprimer v+(t) et v−(t). On pourra introduire pour ce calcul les variables réduites : $u = \frac{v}{v_{lim}}$ et et $\theta = \frac{t}{\tau}$. On exprimera les vitesses en fonction de v_{lim} , τ, v_0 (vitesse initiale), t_1 (temps de passage à l'altitude maximale) et t.
7) Évaluer numériquement v_{lim}, τ et γ (on s'appuiera sur les représentations graphiques et les résultats des calculs).

Formulaire :

Fonction	arctan(x)	arctanh(x)
Fonction dérivée	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1-x^2}$
Fonction réciproque	tan(x)	tanh(x)

On rappelle que : $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Tracé de la fonction tanh(x) :