

Chapitre 13

Energétique du point matériel

I. Puissance et travail d'une force

1. Puissance d'une force dans un référentiel $\mathcal{R}$
2. Travail d'une force dans un référentiel $\mathcal{R}$
 - 2.1 Notion de déplacement élémentaire
 - 2.2 Travail d'une force
3. Cas particuliers
 - 3.1 Force constante
 - 3.2 Travail du poids

II. Théorème de l'énergie cinétique

1. Energie cinétique d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$
2. Théorème de la puissance cinétique (TPC)
3. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

III. Energie potentielle d'une force conservative

1. Définition

2. Expression d'une force conservative en fonction de son énergie potentielle
3. Energie potentielle de pesanteur
4. Energie potentielle élastique
5. Energie potentielle d'une force newtonienne

IV. Théorème de l'énergie mécanique

1. Energie mécanique dans un référentiel $\mathcal{R}$
2. Théorème de l'énergie mécanique
3. Conservation de l'énergie mécanique en l'absence de frottements

V. Mouvement d'un système conservatif à un degré de liberté

1. Equilibre
2. Stabilité de l'équilibre
3. Domaines accessibles à la trajectoire
4. Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable



Energy floor

Le cours

Une force a la capacité de modifier le vecteur vitesse (PFD...). Nous allons notamment nous intéresser dans ce chapitre à l'influence d'une force sur la norme du vecteur vitesse et donc sa capacité à accélérer ou ralentir un mouvement.

I. Puissance et travail d'une force

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ (avec O un point fixe de $\mathcal{R}$) et soumis à une force $\vec{F}$.

1. Puissance d'une force dans un référentiel $\mathcal{R}$

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ (avec O un point fixe de $\mathcal{R}$) et soumis à une force $\vec{F}$.

La puissance d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

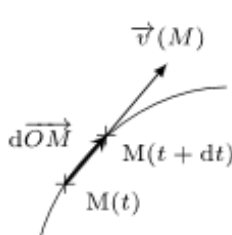
Unité SI : Watt (W)

- $P > 0$: puissance motrice, la force accompagne le déplacement.
Exemple : le poids pendant une chute
- $P < 0$: puissance résistante, la force s'oppose au déplacement.
Exemple : toute force de frottement
- $P = 0$: puissance nulle, $\vec{F} \perp \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$
Exemple : la réaction normale du support

2. Travail d'une force dans un référentiel $\mathcal{R}$

2.1 Notion de déplacement élémentaire

Soumis à la force $\vec{F}$, le point M effectue pendant la durée infinitésimale dt, un déplacement élémentaire $\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}$ noté $d\overrightarrow{OM}$ ou $d\vec{l}$ tel que :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} dt$$


En coordonnées cartésiennes : $d\overrightarrow{OM}(t) = dx(t) \vec{u}_x + dy(t) \vec{u}_y + dz(t) \vec{u}_z$

En coordonnées cylindriques : $d\overrightarrow{OM}(t) = dr(t) \vec{u}_r + r(t)d\theta(t) \vec{u}_\theta + dz(t) \vec{u}_z$

2.2 Travail d'une force

Pour mesurer la capacité d'une force à accélérer ou à ralentir un point matériel, on définit une grandeur, appelée **travail mécanique de $\vec{F}$** .

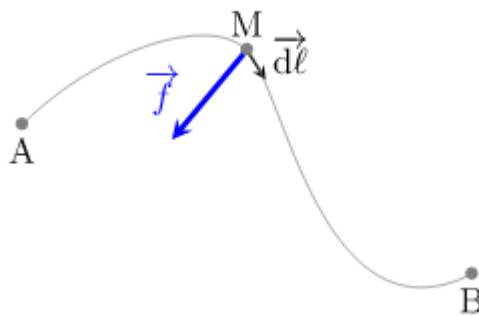
On étudie le mouvement du point M pendant une durée infinitésimale (« très petite ») dt :

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\delta W(\vec{F}) = P(\vec{F}) dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Unité SI : Joule (J)

On étudie le mouvement du point M pendant une durée finie correspondant à une portion de trajectoire comprise entre deux points A et B :



Le travail d'une force $\vec{F}$ entre deux points A et B de la trajectoire, dans un référentiel $\mathcal{R}$, est :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Unité SI : Joule (J)

- $W > 0$: travail moteur, la force accompagne le déplacement.
Exemple : le poids pendant une chute
- $W < 0$: travail résistant, la force s'oppose au déplacement.
Exemple : toute force de frottement
- $W = 0$: travail nul, $\vec{F} \perp \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$
Exemple : la réaction normale du support

Le travail est grandeur algébrique **définie le long d'un déplacement**, qui dépend du référentiel et à priori du chemin suivi (de la trajectoire).

3. Cas particuliers

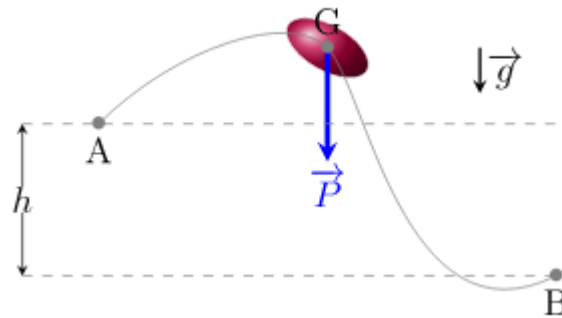
3.1 Force constante

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{OM} = \vec{F} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{F} \cdot (\vec{OB} + \vec{AO})$$

Cas d'une force constante entre A et B : $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$

3.2 Travail du poids :

On considère un point matériel M de masse m parcourant une courbe quelconque entre les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.



Calculons le travail du poids lorsque le point M se déplace du point A au point B.

Le poids étant une **force constante**, on a : $W_{AB}(\overrightarrow{mg}) = \overrightarrow{mg} \cdot \overrightarrow{AB}$

Selon une verticale ascendante :

$$W(\overrightarrow{mg}) = -mg \overrightarrow{u_z} \cdot \left((x_B - x_A) \overrightarrow{u_x} + (y_B - y_A) \overrightarrow{u_y} + (z_B - z_A) \overrightarrow{u_z} \right) = -mg \cdot (z_B - z_A)$$

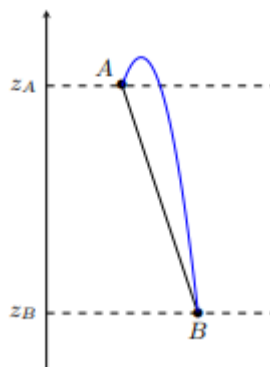
- Descente (comme le schéma) : $z_B < z_A$ donc $W(\overrightarrow{mg}) > 0$
- Montée : $z_B > z_A$ donc $W(\overrightarrow{mg}) < 0$

Selon une verticale descendante : $W(\overrightarrow{mg}) = mg \cdot (z_B - z_A)$

- Descente : $z_B > z_A$ donc $W(\overrightarrow{mg}) > 0$
- Montée : $z_B < z_A$ donc $W(\overrightarrow{mg}) < 0$

On retrouve évidemment le même résultat quel que soit le sens de la verticale choisie !

On remarque ici que le travail du poids ne dépend pas de la forme du trajet mais seulement de la dénivellation $h = |z_B - z_A|$.



Si Oz axe vertical ascendant : $W_{AB}(\overrightarrow{mg}) = -mg \cdot (z_B - z_A)$

Si Oz axe vertical descendant : $W_{AB}(\overrightarrow{mg}) = mg \cdot (z_B - z_A)$

Remarque : si h est la dénivellation entre les points A et B, $W(\overrightarrow{mg}) = mgh$ si M descend (travail moteur) et $W(\overrightarrow{mg}) = -mgh$ si M monte (travail résistant).

Quel que soit le sens de la verticale choisie, si h est la dénivellation :

$W(\overrightarrow{mg}) = \pm mgh$, on choisit le signe selon que M monte ou descend

II. Théorème de l'énergie cinétique

1. Energie cinétique d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m , dans un référentiel $\mathcal{R}$, est :

$$E_c(M) = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2$$

Unité SI : Joule (J)

2. Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Démonstration :

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

$$m \frac{d \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{dt} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = P_{totale} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2 \right) = P_{totale}$$

La dérivée de l'énergie cinétique d'un point matériel, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est égal à la somme des puissances des forces appliquées :

$$\frac{dE_c(M)}{dt} = P_{totale}$$

 AP 1

3. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

On intègre le TPC entre 2 instants correspondants à deux points A et B de la trajectoire :

$$\frac{dE_c(M)}{dt} = P_{totale} \Leftrightarrow dE_c(M) = P_{totale} dt$$

$$\int_A^B dE_c(M) = \int_A^B P_{totale} dt = \int_A^B \delta W_{AB,total} \Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = W_{AB,total}$$

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre 2 positions A et B de la trajectoire, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est égal au travail total des forces appliquées entre ces 2 positions :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB,total}$$

Une force qui travaille a la capacité de modifier la norme du vecteur vitesse. C'est sa composante le long de la trajectoire qui modifie la norme de la vitesse. Si la force est perpendiculaire au déplacement, alors le travail est nul : la force ne fait qu'incurver la trajectoire sans modifier la norme de la vitesse.

Le travail d'une force apparaît comme l'énergie cinétique fournie au point M lorsque son point d'application se déplace.

 **AP 2**

III. Energie potentielle d'une force conservative

1. Définition

Une force est dite conservative si **son travail ne dépend pas du chemin suivi**, il ne dépend alors que des positions entre lesquelles on veut le calculer.

Il peut alors se mettre sous la forme d'une variation d'une fonction ne dépendant que de la position.

On n'a vu que le travail du poids, dans le cas d'un axe Oz ascendant, est : $W_{AB}(\overrightarrow{mg}) = -mg \cdot (z_B - z_A)$

On peut remarquer que $W_{AB}(\overrightarrow{mg}) = -(mgz_B - mgz_A) = -\Delta(mgz)$.

On peut définir une fonction appelée énergie potentielle de pesanteur $E_p = mgz + Cte$ et telle que $W_{AB}(\overrightarrow{mg}) = -\Delta E_p$.

Contre exemple : force de frottement

 **AP 3**

Une force est dite conservative si son travail entre 2 points ne dépend pas du chemin suivi.

On peut alors lui associer une énergie potentielle $E_p(M)$, ne dépendant que de la position de M, et telle que le travail de la force entre 2 points A et B de la trajectoire est :

$$W_{AB}(\vec{F} \text{ conservative}) = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$$

L'énergie potentielle est une énergie de position.

Une force conservative ne peut donc dépendre que des coordonnées de position.

Le travail a une valeur bien précise, l'énergie potentielle est quant à elle définie à une constante près. Cette constante se détermine à partir du choix de l'énergie potentielle ($E_p = 0$).

Interprétation du signe - : Si l'énergie potentielle diminue lors du mouvement, le travail de la force est moteur et l'énergie cinétique augmente, et inversement. **L'énergie potentielle apparaît comme une énergie potentiellement disponible, pouvant se convertir en une autre forme d'énergie, par exemple en énergie cinétique, lors du mouvement du point.**

Lors de l'application du TEC, plutôt que de calculer le travail des forces conservatives sur le chemin suivi, il est préférable de calculer les variations des énergies potentielles correspondantes entre le départ et l'arrivée. En effet, le calcul du travail, selon la trajectoire suivie, peut être délicat, alors que le calcul de la variation d'une énergie potentielle dont on connaît l'expression est simple.

2. Expression d'une force conservative en fonction de son énergie potentielle

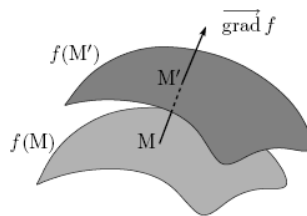
Complément mathématique : Gradient d'un champ scalaire

On appelle champ scalaire une fonction f qui à tout point M d'une zone d'espace associe un nombre réel $f(M)$.

On définit le gradient comme une grandeur vectorielle qui indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace.

En coordonnées cartésiennes, $df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \right) \cdot d\vec{OM}$

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot d\vec{OM}$$



$\overrightarrow{MM'} = d\vec{OM}$, vecteur déplacement élémentaire.

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Le gradient est dirigé dans le sens de l'augmentation de f , il est orthogonal aux surfaces $iso - f$ ($f = \text{Cte}$). Exemple : carte IGN et lignes de niveau (« iso-altitude »)

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

Considérons une force $\vec{F}$ conservative : $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$

En coordonnées cartésiennes : $\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z \right)$

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

3. Energie potentielle de pesanteur

On peut reprendre les résultats précédents avec le travail.

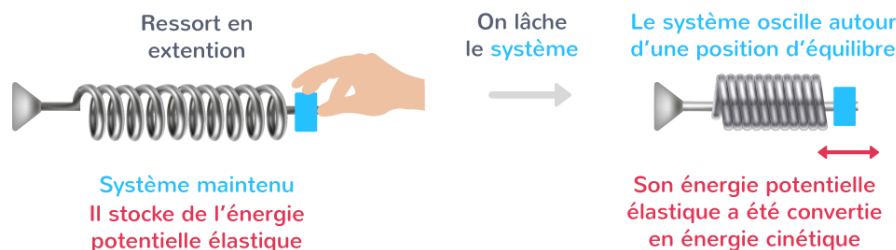
Autre façon de l'établir : $\overrightarrow{mg} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,p}) = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z$

L'énergie potentielle de pesanteur est :

Si Oz axe vertical ascendant : $E_{p,p} = mgz + Cte$

Si Oz axe vertical descendant : $E_{p,p} = -mgz + Cte$

4. Energie potentielle élastique



$$W_{AB}(\vec{F}_e) = \int_{l_A}^{l_B} -k(l - l_0) \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

On choisit $\vec{u} = \vec{u}_x$ et on pose $x = l - l_0$ l'allongement du ressort.

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$W_{AB}(\vec{F}_e) = \int_{l_A}^{l_B} -k x dx = -\left(\frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_A^2\right) = -\Delta\left(\frac{1}{2} k (l - l_0)^2\right)$$

Autre façon de l'établir : $-k x \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,e}) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x$ $E_{p,e} = \frac{1}{2} k x^2 + Cte$

On choisit généralement $E_p(x = 0) = 0$, la constante est dans ce cas nulle.

L'énergie potentielle élastique est : $E_{p,e} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$

5. Energie potentielle d'une force newtonienne

Une force est dite newtonienne si elle est de la forme : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$, c'est le cas des interactions gravitationnelles et coulombiennes.

$$W_{AB}(\vec{F}_e) = \int_A^B -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$W_{AB}(\vec{F}_e) = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{K}{r^2} dr = \frac{K}{r_B} - \frac{K}{r_A} = -\Delta\left(-\frac{K}{r}\right)$$

Autre façon de l'établir : $-\frac{K}{r^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r$ (en coordonnées sphériques)

$$E_p = -\frac{K}{r} + Cte$$

On choisit $E_p(\infty) = 0$.

L'énergie potentielle newtonienne est : $E_p = -\frac{K}{r}$

IV. Théorème de l'énergie mécanique

1. Energie mécanique dans un référentiel $\mathcal{R}$

L'énergie mécanique d'un point matériel M de masse m , dans un référentiel $\mathcal{R}$, est :

$$E_m(M) = E_c(M) + E_p(M)$$

Unité SI : Joule (J)

2. Théorème de l'énergie mécanique

Dans $\mathcal{R}$ référentiel galiléen, on distingue les forces conservatives (dont la somme des travaux est W^c) des forces non conservatives (dont la somme des travaux est W^{nc}).

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre 2 positions A et B de la trajectoire, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est égal au travail total des forces non conservatives appliquées entre ces 2 positions :

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}^{nc}$$

Remarque : théorème de la puissance mécanique $\frac{dE_m(M)}{dt} = P_{totale}^{nc}$

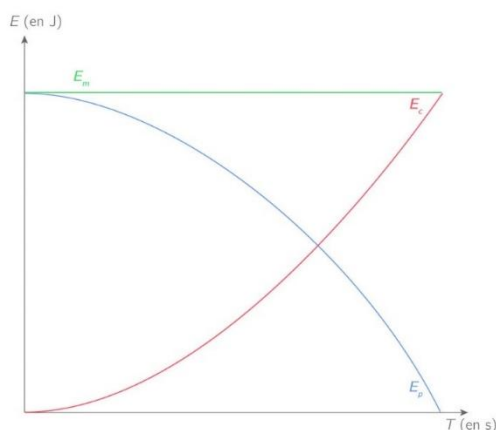
3. Conservation de l'énergie mécanique en l'absence de frottements

En l'absence de forces non conservatives, $E_m(M) = Cte$, l'énergie mécanique se conserve et sa valeur est fixée par les conditions initiales.

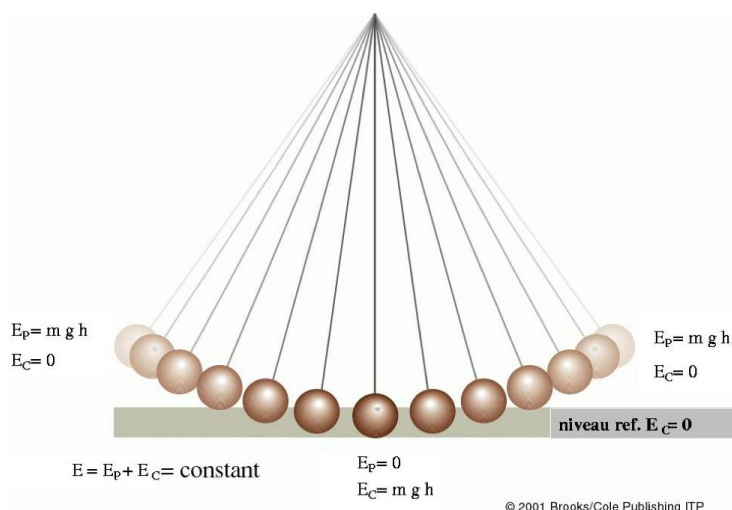
Cette équation est appelée **intégrale 1^{ère} du mouvement**.

- Chute libre verticale en l'absence de frottements :

Quand l'objet chute, il perd de l'énergie potentielle et gagne de l'énergie cinétique.

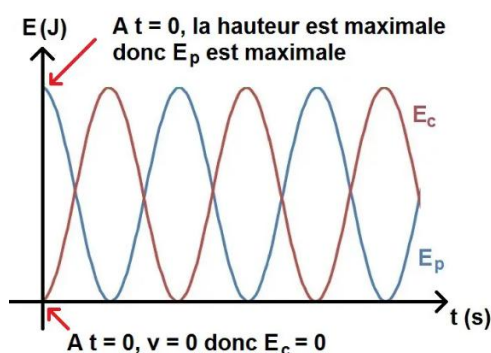


- Pendule simple en l'absence de frottements :

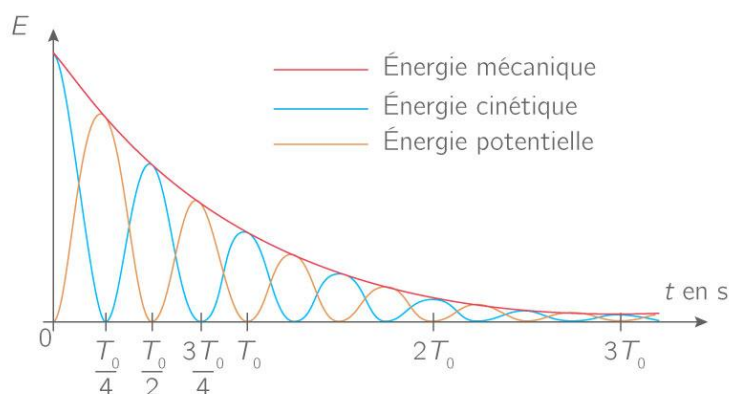


A $t = 0$, nous élevons la masse à une hauteur h au-dessus de la position d'équilibre. Nous augmentons ainsi son énergie potentielle de mgh .

En lâchant la masse, elle est accélérée du fait du poids et l'énergie cinétique augmente jusqu'à que le point passe à la verticale. Le poids fournit un travail au pendule égal à mgh : toute l'énergie potentielle accumulée a été convertie en énergie cinétique. Passée cette position, le poids ralentit le mouvement, jusqu'à ce que toute l'énergie cinétique soit reconvertie en énergie potentielle. A ce point la masse est de nouveau à l'arrêt.



- Pendule simple en présence de frottements :



Cas d'un pendule très peu amorti ($Q \gg 1$, $T \approx T_0$)

V. Mouvement d'un système conservatif à un degré de liberté

Un système à un degré de liberté est un système dont le repérage du système dans l'espace ne nécessite qu'un seul paramètre. Dans cette partie, on considère un système à un degré de liberté, x , sur lequel s'exercent des forces conservatives de résultante $\vec{F} = F(x)\vec{u}_x$. On définit alors une énergie potentielle correspondante $E_p(x)$ qui ne dépend que de x .

1. Equilibre

On dit que x_e est une position d'équilibre si lorsqu'on place M en cette position sans vitesse initiale, il y reste.

Par définition de l'énergie potentielle : $\delta W(\vec{F}) = -dE_p \Rightarrow F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$

La position d'équilibre x_e du système est telle que : $\vec{F}(x_e) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$

Un système conservatif possède une position d'équilibre en $x = x_e$ si son énergie potentielle possède un extrémum local en ce point :

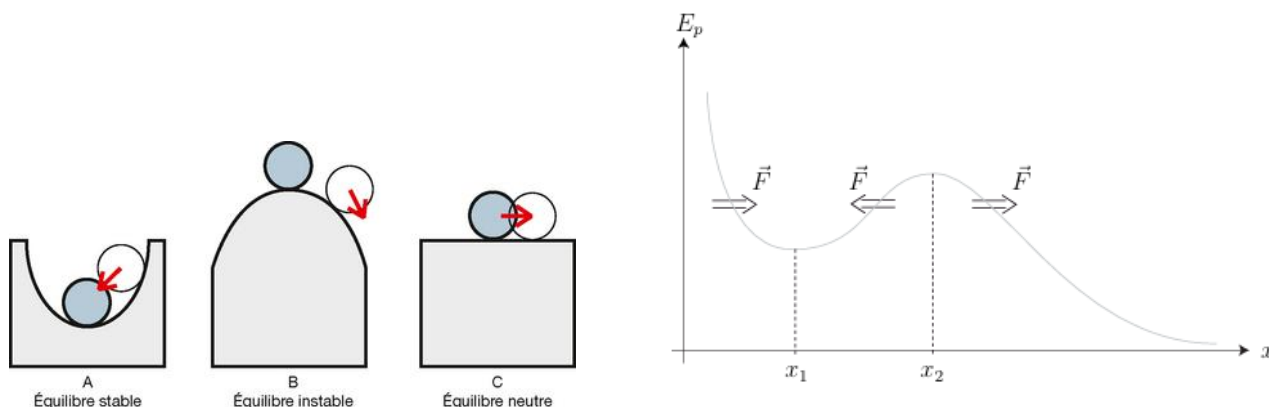
$$\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$$

2. Stabilité de l'équilibre

On dit qu'une position est un équilibre stable, si quand on écarte légèrement un point M de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à ramener M vers sa position d'équilibre initiale.

On dit qu'une position est un équilibre instable, si quand on écarte légèrement un point M de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à éloigner davantage M de sa position d'équilibre initiale.

Une position d'équilibre est indifférente s'il ne se passe rien quand on déplace l'objet de sa position d'équilibre.



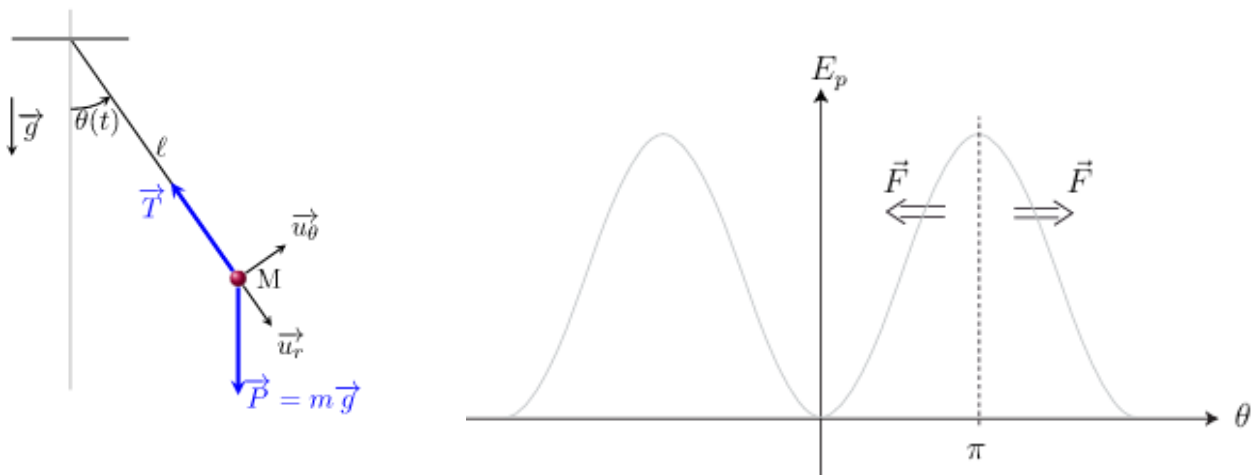
Un système conservatif possède une position d'équilibre localement stable si son énergie potentielle possède un minimum local en ce point.

Un système conservatif possède une position d'équilibre localement instable si son énergie potentielle possède un maximum local en ce point.

La stabilité de l'équilibre peut être donnée par le signe de $\frac{d^2 E_p}{dx^2}$ si celle-ci est non nulle :

- Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) > 0$: l'extremum est un minimum, l'équilibre est stable
- Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) < 0$: l'extremum est un maximum, l'équilibre est instable

Exemple : Pendule simple



$$E_{p,p} = mgl(1 - \cos\theta) \quad (\text{Si on choisit } E_{p,p}(0) = 0)$$

$$F_\theta = -mg \sin\theta$$

$x = 2k\pi$ est une position d'équilibre stable.

$x = k\pi$ est une position d'équilibre instable.

3. Domaines accessibles à la trajectoire

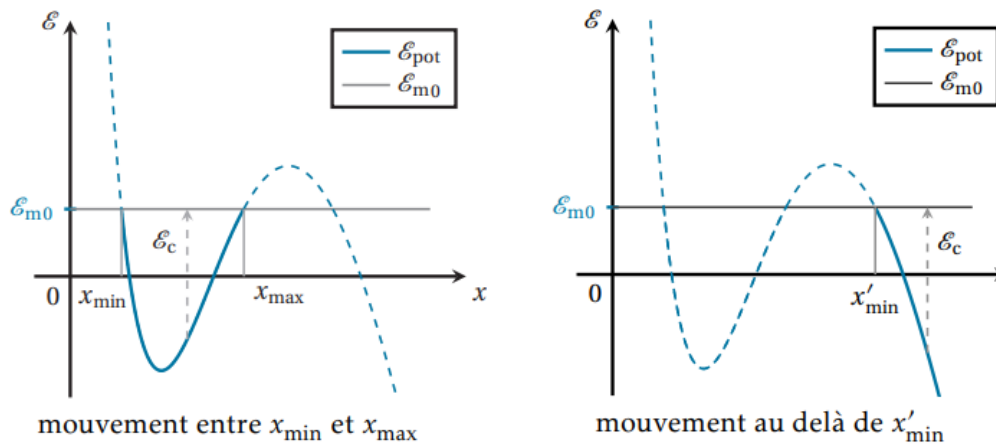
L'énergie mécanique d'un système conservatif est constante, elle est déterminée par les conditions initiales et est répartie entre l'énergie potentielle et cinétique : $E_m = E_c + E_p$.

Comme l'énergie cinétique ne peut être que positive ou nulle, l'énergie potentielle ne peut pas dépasser la valeur fixée de l'énergie mécanique.

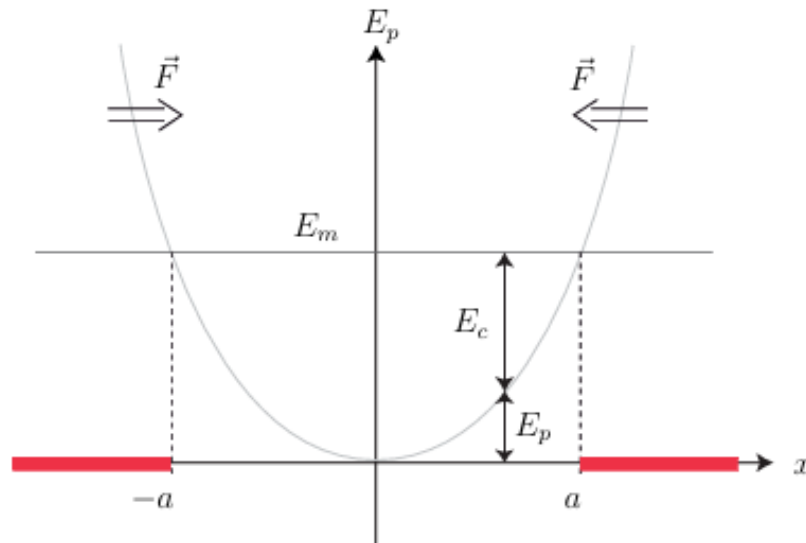
Les domaines accessibles à la trajectoire sont tels que : $E_p(x) \leq E_m$.

- Si les états accessibles de M sont bornés, c'est-à-dire $x \in [x_{min}, x_{max}]$, on dit que la trajectoire de M est bornée. M est dit dans un état lié. On parle de puits de potentiel.
- Si les états accessibles de M ne sont pas bornés, c'est-à-dire $x \in [x'_{min}, +\infty[$, on dit que la trajectoire de M n'est pas bornée. M est dit dans un état de diffusion : le point M peut s'éloigner à l'infini.

Dans l'exemple ci-dessous, il existe 2 domaines accessibles à la trajectoire :



Exemple : un point élastiquement lié en l'absence de frottements.



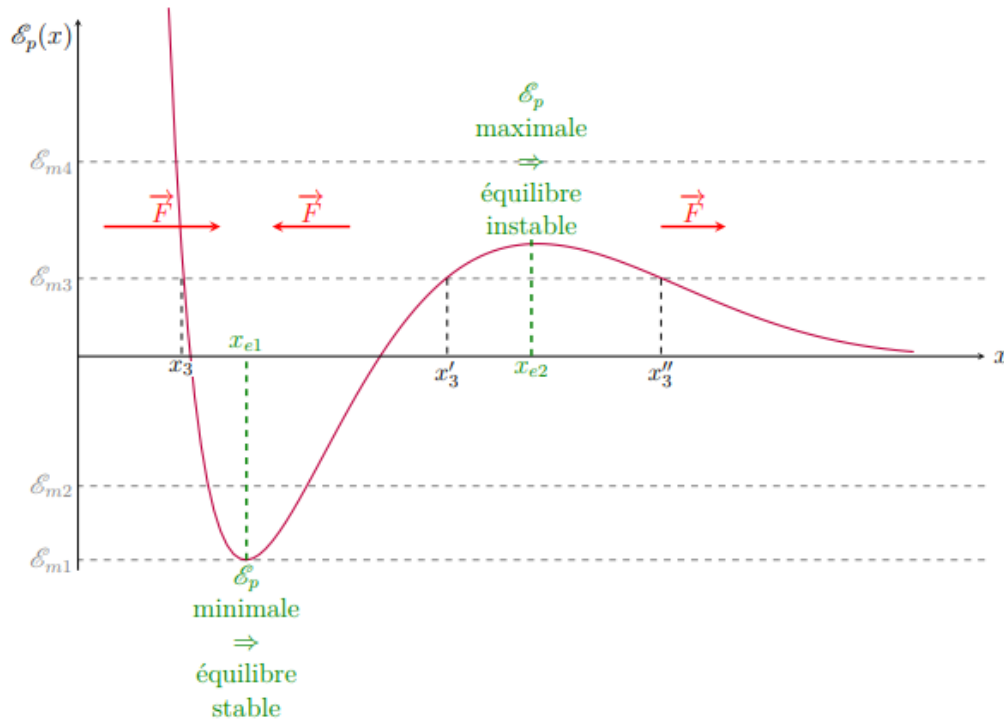
$$E_{p,e} = \frac{1}{2} k x^2, \text{ on parle } \mathbf{\text{potentiel harmonique}}$$

$x = 0$ est une position d'équilibre stable.

$$F_x = -k x$$

D'après le PFD, $m\ddot{x} + kx = 0$: **OHNA**

Le mouvement est limité entre $x = a$ et $x = -a$, le système oscille autour de la position d'équilibre stable, a est l'amplitude des oscillations.

Analyse d'un graphe d'énergie potentielle :


:

- **Si $E_m = E_{m1}$** : une seule position satisfait à la condition $E_m \geq E_p(x)$, x_{e1} est donc la seule position accessible.

$E_m = E_p$ et $E_c = 0$: Le système est immobile à la position d'équilibre x_{e1} .

- **Si $E_m = E_{m2}$** : les positions qui satisfont à la condition $E_m \geq E_p(x)$ sont comprises entre x_2 et x'_2 : la trajectoire est donc bornée. En $x = x_2$ ou $x = x'_2$, $E_m = E_p$, alors $E_c = 0$, donc ce sont des points de vitesse nulle.

Supposons qu'initialement, M se trouve en x_2 avec une vitesse nulle. x_2 n'étant pas une position d'équilibre, M va nécessairement se déplacer dans le sens des x croissants, vers des positions d'énergie potentielle plus faible, son énergie cinétique va augmenter jusqu'en x_{e1} . M passe en x_{e1} avec une vitesse non nulle, et ne s'y arrête donc pas. M poursuit vers les x croissants, pour lesquels E_p augmente, donc E_c diminue. Jusqu'à x'_2 , où $E_m = E_p$, la vitesse de M s'annule.

x'_2 n'étant pas une position d'équilibre M va nécessairement se déplacer, dans le sens des x décroissants, et donc emprunter le chemin exactement inverse avec la même vitesse en valeur absolue. Et ainsi de suite : M oscille périodiquement entre x_2 et x'_2 (attention : les oscillations ne sont pas forcément harmoniques)

- **Si $E_m = E_{m3}$** : les positions qui satisfont à la condition $E_m \geq E_p(x)$ sont $x \in [x_3, x'_3]$ et $x \in [x''_3, +\infty[$. En $x = x_3$ ou $x = x'_3$ ou $x = x''_3$, $E_m = E_p$, alors $E_c = 0$, donc ce sont des points de vitesse nulle.

Les positions accessibles au point M dépendent de sa position initiale.

Si $x(0) \in [x_3, x'_3]$, alors la trajectoire de M sera bornée.

Si $x(0) \in [x''_3, +\infty[$, alors M pourra s'éloigner à l'infini, la trajectoire n'est donc pas bornée.

M ne peut pas passer d'une zone à l'autre : on parle de **barrière de potentiel**.

- **Si $E_m = E_{m4}$** , alors toutes les positions $x \in [x_4, +\infty[$ sont accessibles, la trajectoire n'est pas bornée.

4. Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

On étudie le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre x_e . Développons $E_p(x)$ autour d'une position d'équilibre x_e . On se limite à l'ordre 2 (approximation harmonique).

$$E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{dE_p}{dx}(x_e)(x - x_e) + \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) \frac{(x - x_e)^2}{2} + \dots$$

$\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$ car x_e est une position d'équilibre.

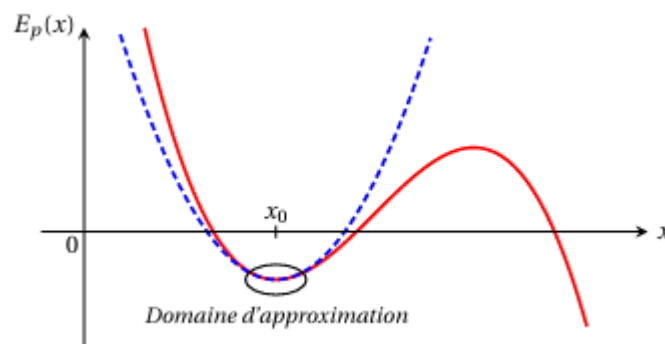
$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}(x) \approx 0 - \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)(x - x_e)$$

On pose $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)$ (supposé non nul) et on applique le PFD :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_e) \text{ soit } m\ddot{x} + kx = kx_e$$

Si x_e est une position d'équilibre stable : $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0$

Graphiquement cette approximation consiste à assimiler localement l'énergie potentielle à un potentiel harmonique ayant exactement la même courbure au niveau de la position d'équilibre.



On retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)}$ et dont la solution est unique si les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ sont connues. Le système oscille harmoniquement autour de la position d'équilibre stable.

Pour aller plus loin : dans le cas où on ne reste pas au voisinage, les oscillations peuvent ne pas être harmoniques (cas du pendule). Intéressons-nous à la période des oscillations d'amplitude quelconque.

$E_c = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 = E_m - E_p(x) \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E_m - E_p(x))}{m}}$ où le signe $\pm$ dépend du sens du mouvement : à chaque rencontre avec une barrière de potentiel, $\dot{x}$ change de signe.

Après séparation des variables on peut écrire : $dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2(E_m - E_p(x))}} dx$

$$t_2 - t_1 = \pm \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{m}{2(E_m - E_p(x))}} dx$$

La période correspond à 4 fois la durée d'un passage entre la position d'équilibre et la position maximale x_{max} .

La période du mouvement est donc :

$$T = 4 \int_0^{x_{max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_m - E_p(x))}} dx$$

Remarque: Si x_e est une position d'équilibre instable : $k < 0$, le système s'éloigne de la position d'équilibre instable. La solution diverge et cesse rapidement d'être valable.

Pour aller plus loin : Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) = 0$, comment conclure ?

- Si $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x) = 0 \forall x : F(x) = 0 \forall x$, l'équilibre est indifférent.
- Si la dérivée seconde est nulle en x_e , il faut étudier plus précisément la fonction $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$. **L'équilibre est stable si pour $x < x_{eq}$ on a $F(x) > 0$ et pour $x > x_{eq}$ on a $F(x) < 0$, il est instable dans le cas contraire.** Si on procède par approximation, il faut poursuivre le DL jusqu'au 1^{er} terme non nul et étudier le signe de $F(x)$ de part et d'autre de x_e pour voir s'il s'agit d'un équilibre stable ou instable.

Exemples :

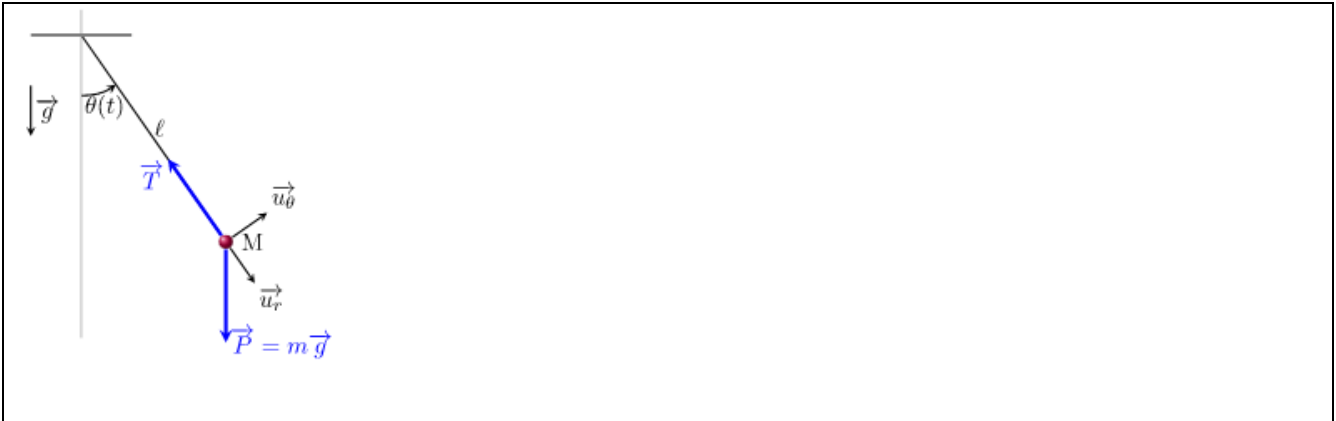
$F(x) \approx -\frac{1}{2} \frac{d^3 E_p}{dx^3}(x_e)(x - x_e)^2$, $F(x)$ ne change pas de signe avec $(x - x_e)$ donc équilibre instable (la courbe $E_p(x)$ présente un point d'inflexion à tangente horizontale).

$F(x) \approx -\frac{1}{6} \frac{d^4 E_p}{dx^4}(x_e)(x - x_e)^3$, $F(x)$ change de signe avec $(x - x_e)$ donc la stabilité de l'équilibre dépend du signe de $\frac{d^4 E_p}{dx^4}(x_e)$ (stable si > 0 , instable sinon)

Applications

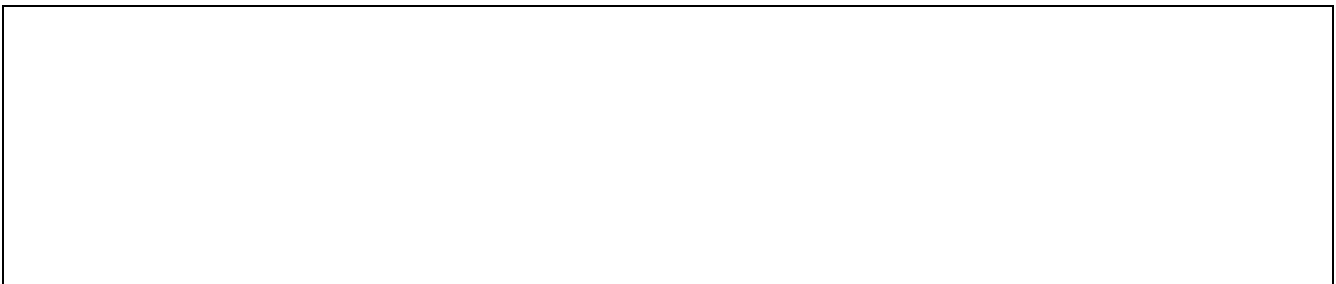
Application 1 : Pendule simple

On étudie une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l . On néglige les frottements de l'air. La masse est écartée de la verticale d'un angle θ_0 et est lâchée sans vitesse initiale. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ .



Application 2 : Tir d'un obus

Un canon tire un obus à la vitesse $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$ suivant la verticale ascendante. Le référentiel terrestre est considéré galiléen et le champ de pesanteur terrestre vaut $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Appliquer le TEC afin de calculer l'altitude maximale h atteinte par l'obus, si l'on néglige la résistance de l'air.



Application 3 : Travail d'une force de frottement

On considère un objet qui glisse sur un plan horizontal et soumis à une force de frottement solide de coefficient μ vérifiant les lois de Coulomb. Exprimons le travail pour aller de A à B par deux chemins : soit directement, soit en passant par C. Commenter et conclure.

