TD 13 - Energétique du point matériel

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force
→ Savoir appliquer le TEC, le TEM ou le TPC selon le contexte
→ Savoir calculer le travail ou l'énergie potentielle des forces suivantes : poids, force de rappel élastique, force gravitationnelle
→ Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté
→ Distinguer force conservative et non conservative
→ Exploiter la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement
→ Savoir interpréter un graphe d'énergie potentielle : barrière et puits de potentiel, trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle, équilibre et stabilité de l'équilibre
→ Etablir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre

J'apprends mon cours : *Questions de cours, exercices 1, 3, 4, 8*

Questions de cours

Q1. Enoncer et démontrer les théorèmes énergétiques.
Q2. Etablir l'expression des énergies potentielles de pesanteur, élastique et newtonienne.
Q3. Décrire un équilibre stable et instable.

Exercices

Le référentiel terrestre est supposé galiléen et l'intensité du champ de pesanteur g = 9.81m.s⁻².

Exercice 1 : Tri postal

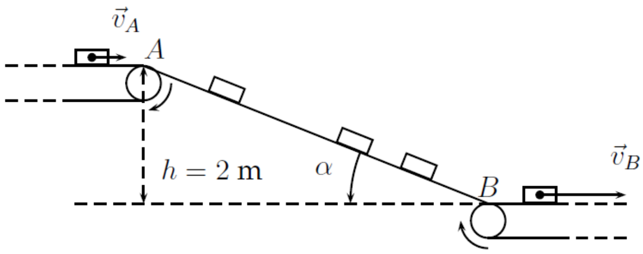
★☆☆
Ref. 0101

✓ *Lois de Coulomb*

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal.

Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0{,}5\ m.s^{-1}$, ils glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est $\mu = 0{,}4$. Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $v_B = 0{,}2\ m.s^{-1}$.

Déterminer l'expression puis la valeur de α pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est-à-dire pour que les colis arrivent en B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.



Exercice 2 : Chute de la Terre sur le Soleil

★★☆
Ref. 0102

✓ *Energie potentielle gravitationnelle*

Supposons que, pour une raison inconnue, la Terre perde brusquement toute sa vitesse orbitale.
Elle tomberait alors en direction du Soleil. On cherche à calculer la durée τ de la chute.
On notera M la masse du Soleil, a le rayon orbital de la Terre et G la constante de gravitation.

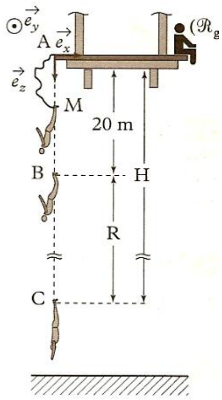
1) À l'aide d'un raisonnement énergétique, établissez l'équation différentielle du premier ordre relative à la chute.
2) À l'aide d'une séparation des variables, exprimez la durée τ en fonction de M, G, a et I tel que $I = \int_0^a \sqrt{\frac{x}{a-x}}\mathrm{d}x.$
3) Sachant que $I = \pi a/2$ et que la période orbitale de la Terre vaut $T_0 = 1$ an, calculez τ.

Exercice 3 : Saut à l'élastique

★☆☆
Ref. 0103

✓ *Mouvement conservatif*
✓ *Energie potentielle élastique*

Un sauteur à l'élastique modélisé par un point matériel M de masse $m = 70\ kg$, tombe depuis un pont, en A, avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre. A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort idéal, de masse négligeable, de longueur à vide $l_0 = 20\ m$ et de raideur $k = 120\ N.m^{-1}$. On néglige tous les frottements.



Déterminer la hauteur de chute H.

Exercice 4 : Piégeage d'un électron

★☆☆
Ref. 0104

✓ *Oscillateur harmonique amorti*

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$ et de charge $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$ dans un dispositif de piégeage.
Son énergie potentielle vaut alors $E_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2} z^2$ où $V_0 = 5{,}0\ V$ et $d = 6{,}0\ mm$.

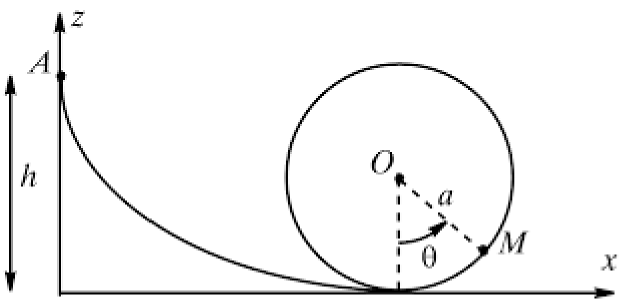
En négligeant tout phénomène dissipatif, calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

Exercice 5 : Looping ♥

★★☆
Ref. 0105

✓ *Mouvement conservatif*

Une voiture de manège de masse $m = 24\ kg$ est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon $a = 4{,}7m$ de la figure ci-dessous. On donne $g = 9{,}81 m.s^{-2}$ La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude $h > a$.



On suppose que h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

1) Exprimer la vitesse v_B en B (point au niveau du sol) de la voiture en fonction de g et h.
2) Exprimer la vitesse v_M en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.

Soit $\vec{R}_n$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.

3) Exprimer $\|\vec{R}_n\|$ en M en fonction de m, g, h, a et θ.
4) Pour quel point M_0 du cercle $\|\vec{R}_n\|$ est-elle minimale ?
5) Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.
6) Pour des raisons de sécurité, on veut qu'à chaque instant la réaction du rail soit toujours supérieure au quart du poids du chariot. Déterminer sous forme littérale puis calculer la hauteur minimale pour que cette condition soit remplie.

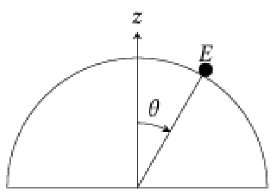
Exercice 6 : Glissade sur un igloo

★★☆
Ref. 0106

✓ *Mouvement circulaire*

Un enfant esquimau de masse m glisse sans frottement sur le toit d'un igloo de rayon R d'où il s'élance sans vitesse initiale.

1) Exprimer la vitesse en une position θ.
2) Exprimer la réaction normale du support.
3) A partir de quelle valeur de θ, l'enfant décolle-t-il ?



Exercice 7 : Des toboggans sous contrôle (CCS TSI 2018)

★★☆
Ref. 0107

- ✓ *Mouvement hélicoïdal*
- ✓ *Théorème de la puissance cinétique*

Les toboggans font aujourd'hui partie des incontournables d'un centre aquatique. De nombreux toboggans présentent des enroulements plus ou moins complexes.

On étudie le toboggan présenté ci-contre et composé d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement $\mathrm{n} = 2{,}3\ tours$.
Le rayon moyen est estimé à $R = 2{,}0$ m et la hauteur de l'ensemble est $h = 4\ m$. On néglige les frottements.
On note $\theta > 0$ la position angulaire du baigneur dans le toboggan relativement à la position de départ, d'altitude h.

Le baigneur suit la trajectoire d'équation $r = R, z = \alpha\theta$, l'axe (Oz) étant orienté selon la verticale descendante.

1) Déterminer la valeur de α.
2) Calculer la valeur de la vitesse atteinte en sortie du toboggan, le départ se faisant sans vitesse initiale.
3) Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert ; toutes les t_f secondes. On impose une marge de $t_m = 5$ s en plus de la durée de parcours dans le toboggan. Calculer t_f.

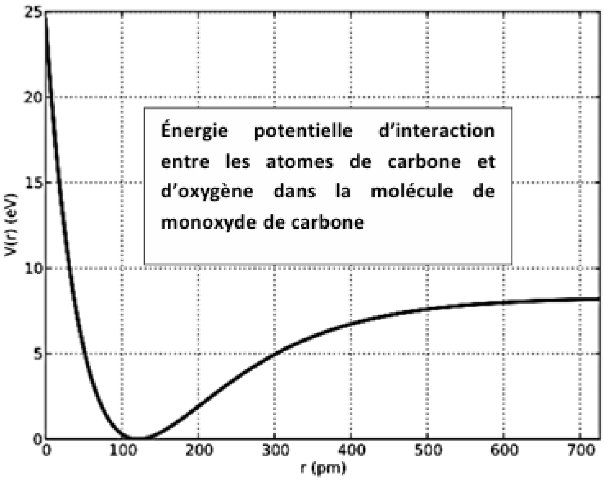
Exercice 8 : Vibration de la molécule de monoxyde de carbone

★☆☆
Ref. 0108

- ✓ *Stabilité de l'équilibre*
- ✓ *Oscillations autour d'une position d'équilibre stable*

Une molécule de monoxyde de carbone (CO) est modélisée par deux masses ponctuelles, m_C pour l'atome de carbone et m_O pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'atome d'oxygène est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome de carbone ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe Ox. L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle. L'énergie potentielle d'interaction des 2 atomes, associée à la force qui les lie, est représentée par l'équation empirique de Morse : $V(r) = V_0\left(1 - e^{-\beta(r-r_0)^2}\right)$
Où r est la distance des noyaux des 2 atomes et V_0, β et r_0 sont des constantes positives.

On donne ci-contre le graphe de $V(r)$:



1) Quelle est la dimension de β ?
2) Que représentent physiquement V_0, r_0 ? Faire apparaitre V_0 et r_0 sur le graphe et donner leurs valeurs.
3) L'interaction qui lie les 2 atomes est-elle répulsive ou attractive quand leur distance r est inférieure à la position d'équilibre ?
4) Même question si leur distance r est supérieure à la position d'équilibre.
5) Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à V_0.
6) Montrer qu'il existe un domaine de distance où l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de raideur k que l'on exprimera.
7) Dans le cadre de cette approximation, on souhaite établir l'équation différentielle décrivant les vibrations de la molécule. C'est un système à deux corps, mais on peut considérer que son énergie mécanique est celle d'une particule fictive de masse $\mu = \frac{m_C\, m_O}{m_C+m_O}$, d'abscisse r sur un axe fixe, soumis à l'énergie potentielle $V(r)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $r(t)$, et en déduire la fréquence f_0 des petites oscillations. Faire l'application numérique.

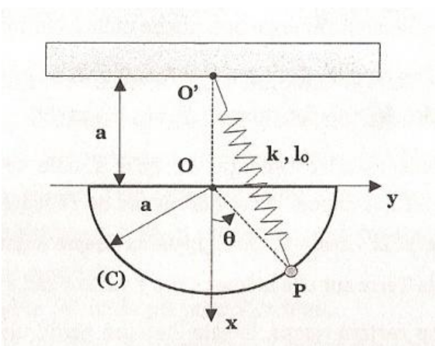
Données : $\beta = 2{,}31.10^{10}\ SI$; $M_C = 12\ g.mol^{-1}$; $M_O = 16\ g.mol^{-1}$; charge élémentaire $e = 1{,}602.10^{-19}\ C$; constante d'Avogadro $N_a = 6{,}02.10^{23} mol^{-1}$.

Exercice 9 : Perle coulissante ♥

★★★
Ref. 0109

✓ *Stabilité de l'équilibre*

Une perle quasi ponctuelle P, de masse m, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle (C) de rayon a. Le point P est attaché à un ressort dont l'extrémité est fixée en O' ($OO' = a$). Le ressort possède une constante de raideur k et une longueur au repos l_0. Le point P est repéré par l'angle θ.



1) Exprimer la longueur $l = O'P$ du ressort en fonction de a et θ.
2) Déterminer l'énergie potentielle E_P du point P (à une constante près).
3) On suppose les relations suivantes entre les paramètres : $k = \frac{2mg}{a}$ et $l_0 = \sqrt{3}\frac{mg}{k}$.
   a) Montrer que $E_P = mga\left(cos\,\theta - 2\sqrt{3}\,cos\frac{\theta}{2}\right) + constante.$
   b) Quelles sont les positions d'équilibre pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
   c) Etudier la stabilité de ces positions.