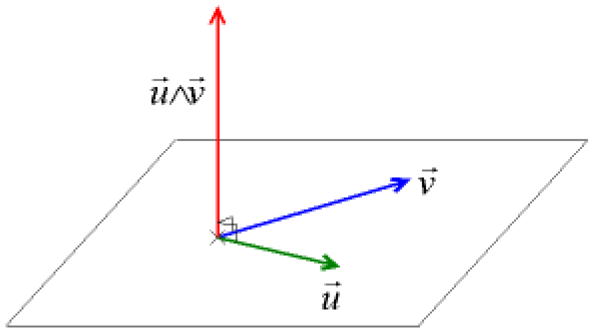
OM 8 – Produit vectoriel

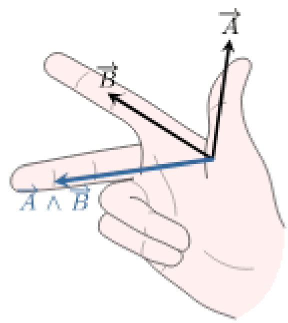
I. Définition

Le produit vectoriel est une opération algébrique entre deux vecteurs dont le résultat est un vecteur.

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est défini par :

- **Sa direction qui est orthogonale à celle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$**
- **Son sens qui est tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est direct.**
- **Sa norme qui vaut $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$**





Expression dans la même base orthonormée directe :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ v_1 u_3 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

II. Propriétés

- ✓ Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- ✓ Linéarité et distributivité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$
$$\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

- ✓ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- ✓ Double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
- ✓ Produit mixte : : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$
  Le produit mixte représente le volume du parallélépipède formé à partir d'un trièdre direct.