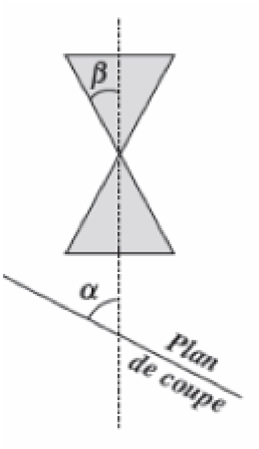
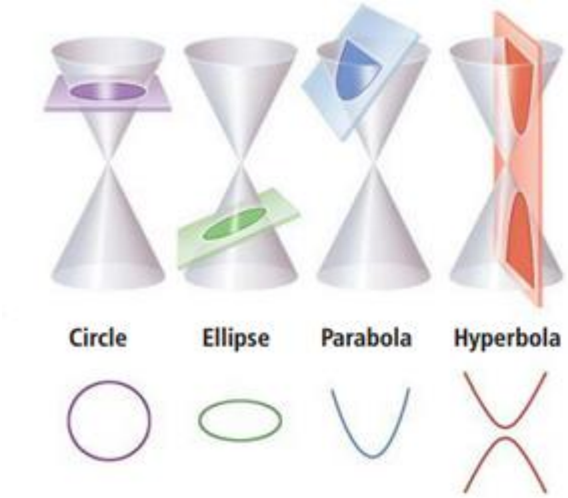
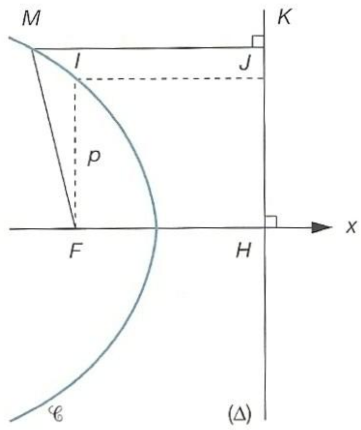
OM 9 – Coniques

I. Définition

Les sections coniques sont les courbes qui résultent de l'intersection d'un double cône droit et d'un plan. Il existe quatre types de sections coniques : les cercles, les ellipses (α > β), les hyperboles (α < β) et les paraboles (α = β).







On appelle conique de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité e, le lieu des point M tels que :

$$\boldsymbol{\frac{MF}{MK} = cte = e}$$

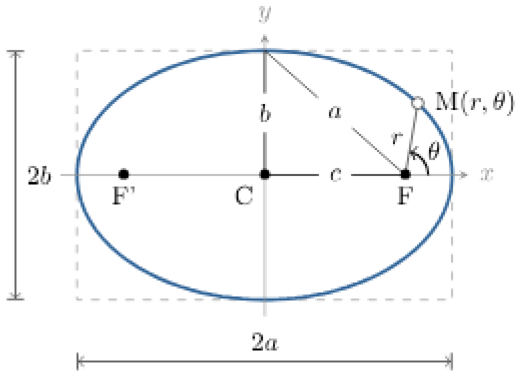
Equation polaire type (cas d'une conique symétrique par rapport à l'axe focal Fx)

$$\boldsymbol{r(\theta) = \frac{p}{\pm 1 + e\cos\theta}}$$

avec $p > 0$ et $e \geq 0$.

Paramètre de la conique : $p = e * FH = r\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$

1. Ellipse : 0< e < 1



On appelle ellipse l'ensemble des points du plan dont la somme des distances à F et F' est constante :

$$\boldsymbol{MF + MF' = Cte = 2a}$$

F et F' sont les **foyers** de l'ellipse, C (0,0) est son **centre**.

Equation polaire : $\boldsymbol{r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$

$r_{max} = \frac{p}{1-e}$ et $r_{min} = \frac{p}{1+e}$

Equation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Liens entre les paramètres :

- Demi grand axe **:** $a = \frac{p}{1-e^2}$
- Demi petit axe **:** $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$
- $a^2 + b^2 = c^2, \qquad e = \frac{c}{a}, \qquad p = \frac{b^2}{a}$
- $r_{max} + r_{min} = 2a$

Cas particulier *:* $e = 0 \Longrightarrow a = b = R$

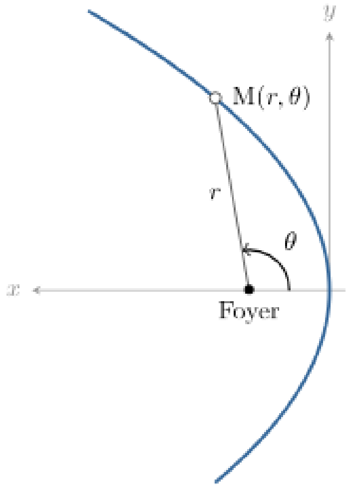
La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon OM = R. Le cercle apparaît comme un cas particulier de l'ellipse : celui où les deux points F et F' sont confondus en O.

2. Parabole : e = 1

On appelle parabole l'ensemble des points du plan dont les distances au point F et à Δ sont égales :

$$\boldsymbol{MF = MK}.$$

F est le **foyer** de la parabole, O est son **sommet**.



Equation polaire : $\boldsymbol{r(\theta) = \frac{p}{1+\cos\theta}}$

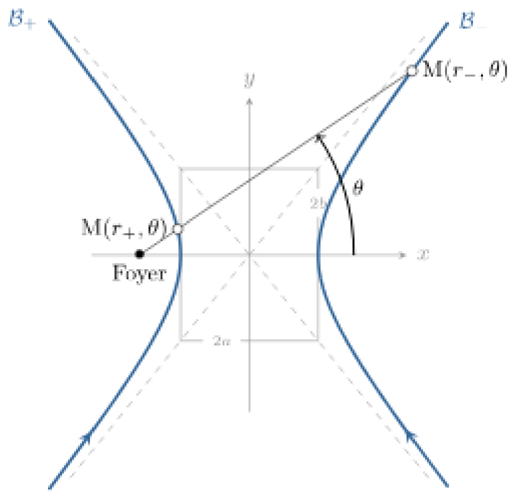
$r_{min} = \frac{p}{2}$

Equation cartésienne : $\boldsymbol{y^2 = 2\,p\,x}$

3. Hyperbole : e > 1

On appelle hyperbole l'ensemble des points du plan dont la différence des distances à *F* et *F'* est constante.

F et F' se nomment les **foyers** de l'hyperbole,
O est son **centre**



$$\boldsymbol{|MF - MF'| = Cte = 2a}$$

Equation polaire : $\boldsymbol{r_+(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$ **et** $\boldsymbol{r_-(\theta) = \frac{p}{-1+e\cos\theta}}$

$r_{+min} = \frac{p}{1+e}$ et $r_{-min} = \frac{p}{-1+e}$

Equation cartésienne : $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Liens entre les paramètres : $a^2 + b^2 = c^2, \qquad e = \frac{c}{a} \qquad (c = OF)$

II. Application au problème de Képler

1. Equation de la trajectoire

Soit la force newtonienne :

$$\boldsymbol{\vec{F}} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r^2}}\boldsymbol{\vec{e_r}}$$

$\vec{F} = \varepsilon \frac{|K|}{r^2}\vec{e_r}$, ε = ±1 selon que la force est répulsive ou attractive.

L'axe focal est pris comme origine des angles.

- **Moment cinétique :** $\boldsymbol{L = Cte = mr^2\dot{\theta}}$
- **Energie potentielle :** $\boldsymbol{E_p = \frac{K}{r}}$

On pose $u = \dfrac{1}{r} \Rightarrow L = \dfrac{m\dot{\theta}}{u^2}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \quad et \quad r\dot{\theta} = \frac{L}{mr} = \frac{Lu}{m}$$

- **Energie mécanique :** $E_m = E_c + E_p = cte$

$E_c = \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{r}\right)^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right)$

On pose $u = \dfrac{1}{r} \Rightarrow L = \dfrac{m\dot{\theta}}{u^2}$

$\dot{r} = \dfrac{dr}{du}\dfrac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\dfrac{L}{m}\dfrac{du}{d\theta} \quad et \quad r\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr} = \dfrac{Lu}{m}$

$E_m = \dfrac{1}{2}m\left(\left(-\dfrac{L}{m}\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{Lu}{m}\right)^2\right) + \varepsilon\,|K|u = \dfrac{L^2}{2m}\left(\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) + \varepsilon\,|K|u$

En dérivant par rapport à θ et en divisant par $\dfrac{du}{d\theta}$, on obtient : $\dfrac{L^2}{m}\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) + \varepsilon\,|K| = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{\varepsilon}{p} \quad avec\ p = \dfrac{L^2}{m|K|}$

La solution est : $u = A\cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{p} = \frac{e\cos(\theta)-\varepsilon}{p} \quad (où\ e = Ap)$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{p}{-\varepsilon + e\cos(\theta)}$$

Cette équation représente une conique dont le point O est l'un des foyers, p le paramètre de la conique et e l'excentricité.

2. Trajectoires dans le cas d'une force newtonienne attractive (ε = -1)

Cas 1 : Orbite Circulaire

$$v = v_s = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Cas 2 : Orbite Elliptique

2.a $v < v_s$: Le point tourne autour de O (foyer le plus éloigné de M)

2.*b* $v_s < v < v_l$: Le point tourne autour de O (foyer le plus proche de M)

Cas 3 : Trajectoire Parabolique

$v = v_l$ (cas limite) : Le point ne tourne plus autour de O, il s'écarte à l'infini.

Cas 4 : Trajectoire Hyperbolique

$v > v_l$: Le point ne tourne plus autour de O, il s'écarte à l'infini, il est à peine dévié par le centre O.

O est ici le centre de force et l'un des foyers des coniques