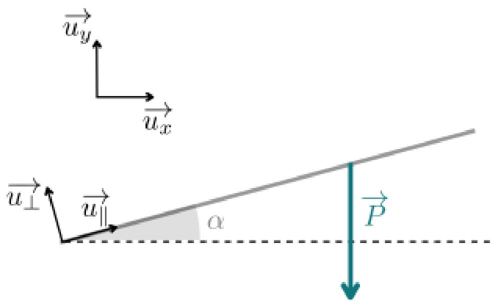
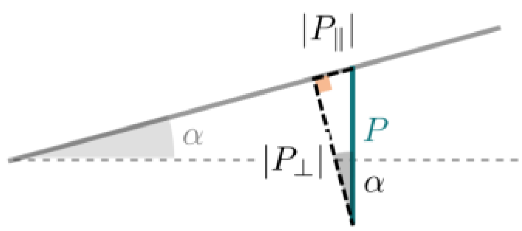
FM 11 – Projections de vecteurs

I. Méthode 1 : en utilisant la trigonométrie

1. **Dessiner le triangle rectangle dont l'hypoténuse est le vecteur à projeter et les côtés de l'angle les projections orthogonales sur les axes de la base.**
2. **Nommer les côtés de ce triangle avec les composantes du vecteur à projeter.**
3. **Repérer un angle du triangle.**
4. **Utiliser les relations de trigonométrie pour déterminer les côtés de l'angle droit.**
5. **Déterminer le signe de chaque composante.**
6. **Écrire le résultat $\vec{V} = \ldots \vec{u}_{\ldots} + \ldots \vec{u}_{\ldots}$ en faisant attention aux signes.**

Exemple :





✓ **Dans la base $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$: $\vec{P} = -P\,\vec{u}_y$**

✓ **Dans la base $\left(\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\perp\right)$:** $\vec{P} = P_\parallel\,\vec{u}_\parallel + P_\perp\,\vec{u}_\perp$

En utilisant les relations de trigonométrie, on obtient l'expression de $P_\parallel$ et de $P_\perp$:

- $\cos(\alpha) = \frac{|P_\perp|}{\|\vec{P}\|} \Longrightarrow |P_\perp| = \|\vec{P}\| \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha) = \frac{|P_\parallel|}{\|\vec{P}\|} \Longrightarrow |P_\parallel| = \|\vec{P}\| \sin(\alpha)$

On choisit maintenant les signes :

- La composante selon $\vec{u}_\perp$ de $\vec{P}$ est positive donc $P_\perp = -\|\vec{P}\|\, cos(\alpha)$
- La composante selon $\vec{u}_\parallel$ de $\vec{P}$ est négative donc $P_\parallel = -\|\vec{P}\|\, sin(\alpha)$

On écrit maintenant le vecteur en fonction des vecteurs de la base :

$$\vec{P} = -\|\vec{P}\| \sin(\alpha)\,\vec{u}_\parallel - \|\vec{P}\| \cos(\alpha)\vec{u}_\perp$$

II. Méthode 2 : en utilisant le produit scalaire

Il est aussi possible de passer par le produit scalaire.

La composante de $\vec{V}$ sur un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ est égal au produit scalaire entre $\vec{V}$ et $\vec{u}$:

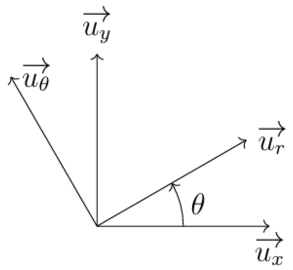
$$\boldsymbol{\vec{V} \cdot \vec{u} = \| \vec{V} \| \cos\left(\vec{V}, \vec{u}\right)}$$

Dans ce cas il ne faut pas réfléchir au signe !

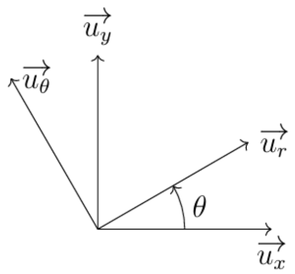
On reprend le même exemple :

$$P_\perp = \vec{P} \cdot \vec{u}_\perp = \| \vec{P} \| \cos\left(\vec{P}, \vec{u}_\perp\right) = \| \vec{P} \| \, cos(\pi - \alpha) = -\| \vec{P} \| \, cos(\alpha)$$
$$P_\parallel = \vec{P} \cdot \vec{u}_\parallel = \| \vec{P} \| \cos\left(\vec{P}, \vec{u}_\parallel\right) = \| \vec{P} \| \, cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\| \vec{P} \| \, sin(\alpha)$$

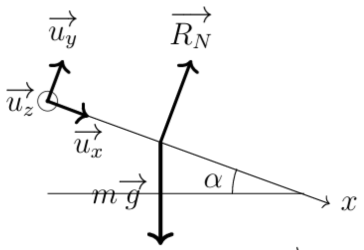
III. Entraînement



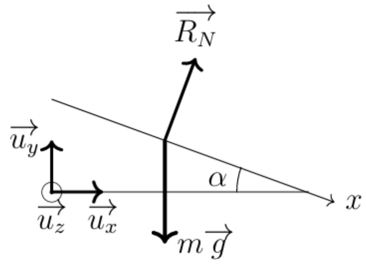
Exprimer $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$.



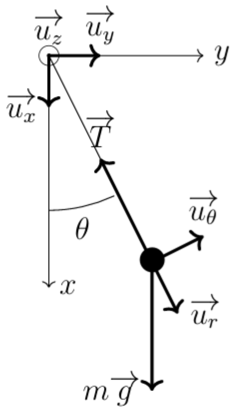
Exprimer $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.



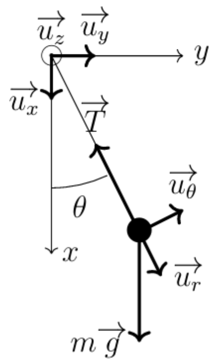
Exprimer $m\vec{g}$ et $\vec{R_N}$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$



Exprimer $m\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{R_N}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$



Exprimer $m\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$



Exprimer $m\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$