TP 16 - Oscillations d'un pendule simple

OBJECTIFS : Etudier la période d'un pendule simple

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Mesurer une période.
→ Établir l'équation du mouvement du pendule. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

Matériel :

- Système Pendulor
- Système d'acquisition Sysam
- Mètre ruban

Fiches utiles : FT10

Rappels du cours

- ***Un oscillateur harmonique non amorti*** *est décrit par une équation différentielle de la forme :*

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_\infty$$

- *x_∞ est la valeur autour de laquelle x(t) oscille : il s'agit en mécanique d'une position d'équilibre stable.*
- *ω_0 est la pulsation propre (rad/s) : c'est la pulsation des oscillations non amorties.*

- ***Système conservatif :*** *mouvement autour d'une position d'équilibre stable* $x_e = 0$

Période des oscillations d'amplitude x_{max} quelconque : $T = 4\displaystyle\int_0^{x_{max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_m - E_p(x))}}\,dx$

- ***En présence de phénomènes dissipatifs****, l'équation différentielle se met sous la forme :*

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_\infty$$

où Q est le facteur de qualité, nombre sans dimension qui caractérise l'amortissement.

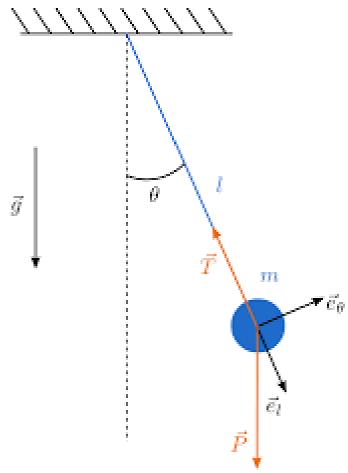
La nature du régime dépend de la valeur de Q. En particulier, si $Q > \frac{1}{2}$, le régime est pseudo-périodique, on observe dans ce cas des oscillations amorties autour de x_∞ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$ est la pulsation des oscillations amorties, dite pseudo-pulsation.

I. Etude préliminaire

1. Le pendule simple

Le pendule simple est formé par :

- Un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ ;
- Une bille de masse m accrochée à l'extrémité du fil.



On néglige tout frottement.

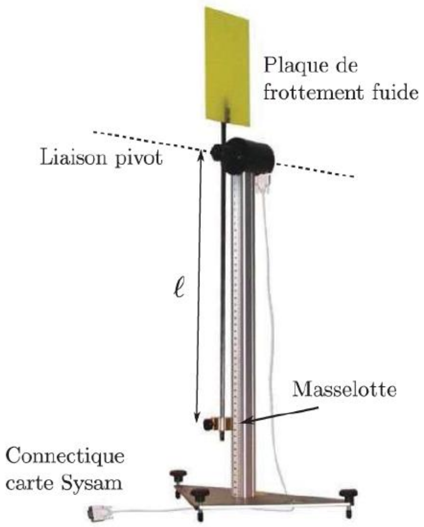
Q1. Etablir l'équation différentielle du mouvement. Commenter.
Q2. On se place dans l'hypothèse des petits angles : que dire du mouvement attendu ? Quelle est alors la période des oscillations ?
Q3. Rappeler dans ce cas, les expressions de l'énergie cinétique en fonction de la vitesse angulaire et celle de l'énergie potentielle (on prendra $E_p = 0$ pour $\theta = 0$).
Q4. Montrer que le système est conservatif, si les frottements sont négligeables.

2. Pendulor : présentation et étude du capteur angulaire

On dispose d'un pendule constitué d'une barre en plastique, de masse supposée négligeable, le long de laquelle on peut déplacer un anneau métallique de masse m = 185 g.
Des plaques en plastique peuvent être fixées sur la tige pour augmenter les frottements avec l'air.

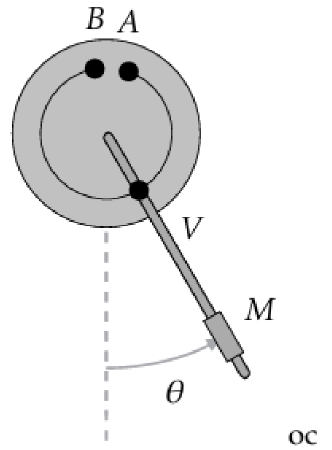
L'axe de révolution du pendule est relié à un capteur de déplacement angulaire délivrant une tension u variant linéairement avec l'angle θ. La liaison pivot entre le pendule et le bâti sera supposée parfaite.
Ce système est connecté à l'interface de l'ordinateur et on a alors accès directement à l'ordinateur à la position angulaire du pendule.

On suppose que ce dispositif constitue un pendule simple.

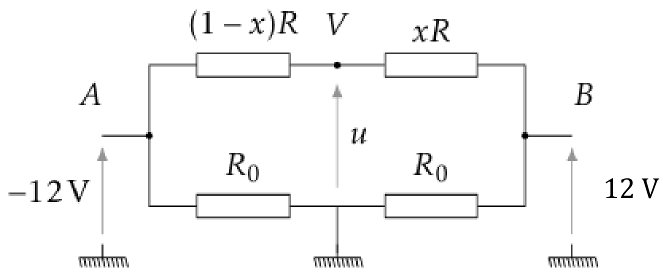


Le capteur angulaire est un potentiomètre à un tour alimenté par des sources idéales de tension -12 V ; 12 V intégrées à la carte d'acquisition.

Q5. Montrer que le montage électrique ci-dessus (nommé pont de Wheatstone) permet d'obtenir une tension u proportionnelle à l'angle θ.



(a) Capteur angulaire utilisant un potentiomètre à un tour.La résistance entre M et A (resp. (M) et B)est proportionnelle à l'angle $\pi - \theta$ (resp. $(\pi + \theta)$).



(b) Montage électrique dans lequel est inséré le potentiomètre AMB.La tension u est proportionnelle à l'ange θ.

On travaille dans un premier temps sans la plaque jaune.

→ Vérifier que la carte d'acquisition est connectée au secteur et que le câble du système Pendulor est connecté à la carte d'acquisition.
→ Positionner la masse à une distance $l = 30$ cm environ de l'axe de rotation. Mesurer l.
→ Régler les paramètres de l'acquisition sur 2000 points et une durée totale 5 secondes.
→ Régler le déclenchement sur « Pendule » à 0° et front montant (paramètres par défaut) pour synchroniser les différentes acquisitions.
→ Lancer une acquisition avec le pendule au repos pour tester le dispositif.
→ Mettre la masse au repos et effectuer le réglage du zéro de la position angulaire en appuyant sur le bouton situé derrière le capteur.

II. Petites oscillations : validité du modèle linéaire

1. Isochronisme des petites oscillations

→ Ecarter la masse d'un angle faible (typiquement entre 0 et 10°) et la lâcher sans vitesse initiale.
→ Lancer l'acquisition.

Q6. Observer la courbe dans une fenêtre graphique du système. Quel modèle proposez-vous ?
Q7. Vérifier avec l'outil Modélisation de Latispro.
Q8. Déterminer la période et l'amplitude des oscillations.

La fonction proposée est censée être de la forme $x(t) = x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Si ce n'est pas le cas et qu'une constante s'ajoute à la fonction sinusoïdale, c'est probablement que le réglage du zéro a été mal effectué. Vous devez alors noter cette valeur moyenne ou régler à nouveau le zéro.

→ Cocher la case **Ajouter les courbes**
→ Recommencer pour deux autres angles initiaux (toujours petits).

Q9. Observer sur un même graphe les courbes $\theta(t)$ pour les 3 conditions initiales différentes. Commenter et conclure.

2. Etude énergétique

→ Dans **Traitement** ouvrir la **Feuille de calcul**. Créer une nouvelle variable *theta* pour convertir les degrés en radians. **Attention : si le réglage du zéro a été mal effectué, vous devez dans soustraire à l'angle la valeur moyenne non nulle (en radians).**
→ Créer la variable *thetap*, vitesse angulaire du pendule, en utilisant la fonction **Deriv** (on pourra ouvrir l'aide pour savoir quels paramètres doivent être donnés à cette fonction).
→ Tracer *thetap* en fonction du temps, selon l'allure de la courbe il sera peut-être nécessaire de lisser ou de modéliser la courbe pour les calculs qui suivent.
→ Créer alors les variables *Ec*, énergie cinétique et *Ep*, énergie potentielle.
→ Créer la variable *Em*, énergie mécanique.
→ Lancer les calculs.
→ Tracer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique en fonction du temps.

Q10. Commenter les courbes obtenues.

III. Oscillations de grandes amplitudes : loi de Borda

→ Reprendre le protocole précédent pour des amplitudes croissantes des oscillations, en restant raisonnables pour ne pas rendre l'expérience dangereuse pour l'intégrité du système et pour celle de vos voisins.
→ Superposer les courbes obtenues pour les différentes conditions initiales. Penser à régler les paramètres de déclenchement pour que la superposition des courbes puisse s'interpréter correctement.
→ Mesurer la période et l'amplitude pour 5 amplitudes initiales différentes.

Q11. Observer sur un même graphe les courbes $\theta(t)$ pour les 5 conditions initiales différentes. Commenter.
Q12. Tracer $T(\theta_0)$. Commenter la courbe obtenue et conclure.

Pour des oscillations de grande amplitude, le comportement s'écarte de l'oscillateur harmonique à cause de la présence du terme non linéaire $\sin\theta$. De ce fait, les oscillations ne sont plus sinusoïdales et la période de celles-ci dépend de l'amplitude θ_m.

La **formule de Borda** est une formule approximative qui donne la période des oscillations pour des amplitudes ne dépassant pas les 60° : $\boldsymbol{T = T_0\left(1+\frac{\theta_m{}^2}{16}\right)}$, avec θ_m l'amplitude des oscillations en radian et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, la pulsation propre du modèle linéaire. On veut établir cette expression.

Q13. A partir de la conservation de l'énergie mécanique, établir l'expression de la période des oscillations du pendule oscillant autour de sa position d'équilibre stable en fonction de l'amplitude des oscillations θ_m et de la pulsation propre ω_0. (le résultat est sous forme d'une intégrale)
Q14. On pose φ tel que $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_m}{2}\sin\varphi$. Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

$$T = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\sin\frac{\theta_m}{2}\sin\varphi\right)^2}}$$

Q15. On peut aller au-delà de l'approximation harmonique, en faisant un DL au voisinage de 0 : $\left(1-\left(\sin\frac{\theta_m}{2}\,\sin\varphi\right)^2\right)^{-1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta_m}{2}\,\sin\varphi\right)^2$. Retrouver la formule de Borda en supposant que $\sin\frac{\theta_m}{2} \approx \frac{\theta_m}{2}$.

Q16. Faire une régression linéaire afin de vérifier la loi de Borda.

IV. Petites oscillations amorties (si on a le temps)

→ Rajouter la plaque jaune et reprendre le protocole précédent pour une amplitude suffisamment petite pour se placer dans le domaine de validité du modèle linéaire et en choisissant une durée d'acquisition plus grande.
→ Lancer l'acquisition.

Q17. Déterminer grâce à l'outil modélisation de Latispro les caractéristiques de l'oscillateur : pseudo-période, la pseudo-pulsation, le facteur de qualité Q, le temps caractéristique τ.

Q18. Reprendre l'étude énergétique précédente et étudier la décroissance de l'énergie mécanique. On pourra modéliser la courbe $E_m(t)$ par une fonction exponentielle décroissante *(voir question 5 de l'exercice 4 du TD 6 Oscillateurs harmoniques)*