OM 10 – Développement limités usuels

Les développements limités (DL) sont employés en physique pour remplacer l'expression d'une fonction compliquée par une fonction approchée, plus facile à exploiter.

Lors d'un exercice ou d'une approximation de courbe, ce sont généralement les premiers termes des DL que l'on utilise, et non l'ordre n.

Les développements limités ci-dessous sont valables quand x tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

Formule de Taylor-Young en 0 : $\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)}$

e^{ax}	$= 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ax)^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\cdots)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots + x^n + o(x^n)$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{ch} x$	$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\operatorname{sh} x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\tan x$	$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$