Devoir surveillé n° 5

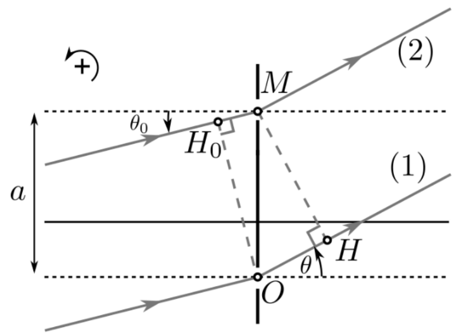
Durée : 3 heures

- ✓ *La calculatrice est autorisée*
- ✓ *Les réponses doivent être **justifiées**.*
- ✓ *Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.*
- ✓ ***Critères de présentation** : un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.*

Critère	***Indicateur***
Lisibilité de l'écriture	*L'écriture ne ralentit pas la lecture.*
Respect de la langue	*La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.*
Clarté de l'expression	*Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1ère lecture*
Propreté de la copie	*La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.*
Mise en évidence des résultats	*Résultats encadrés ou soulignés*
Identification des questions et pagination	*Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.*

Exercice 1 : Fentes d'Young en incidence oblique

Un système de fentes d'Young est éclairé en incidence oblique d'angle θ_0 par une onde plane sinusoïdale monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 (Figure ci-contre).



L'onde se propage dans l'air d'indice $n \approx 1$, et on note $s(M,t)$ sa fonction d'onde. L'onde étant plane : $s(H_0,t) = s(O,t)$.

L'onde est diffractée en O et en M, et on s'intéresse à deux rayons (1) et (2) diffractés dans une même direction quelconque repérée par l'angle θ.

Q1. Exprimer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi(M) - \varphi(H)$ entre les phases en M et en H. On n'opèrera aucune simplification (les angles ne sont pas petits !).

On ne retient que les interférences constructives à l'infini.

Q2. Etablir la relation qui existe entre les directions θ notées θ_k (k étant un nombre entier), qui donnent des interférences constructives à l'infini, en fonction de θ_0, a et λ_0.

Exercice 2 : Ondes gravitationnelles (inspiré de Concours ENS PSI 2017)

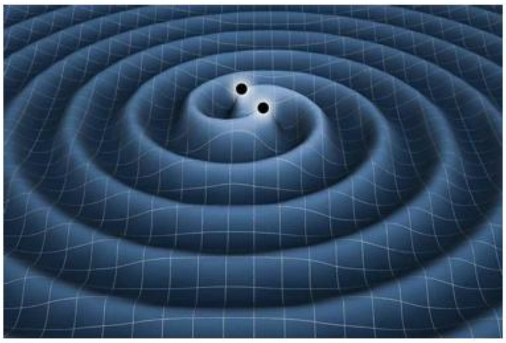
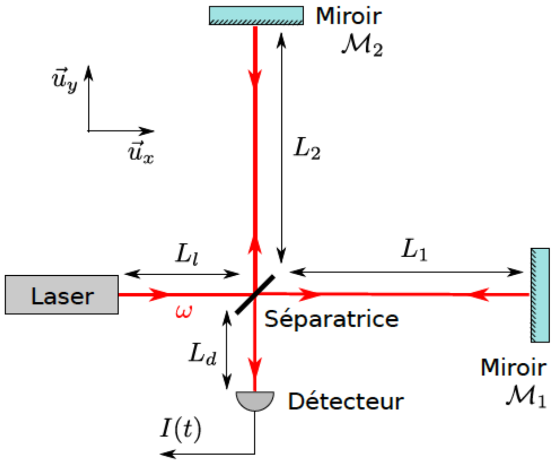


FIGURE 1 – Gauche : illustration représentant les ondes gravitationnelles générées par deux trous noirs orbitant l'un autour de l'autre et se propageant dans l'espace. Droite : détecteur interférométrique européen *Virgo* situé près de Pise en Italie.

La détection directe d'ondes gravitationnelles, prévues par la théorie de la gravitation d'Einstein, et annoncée le 11 février 2016, a été réalisée à l'aide d'un détecteur fondé sur la notion d'interférence lumineuse : l'*interféromètre de Michelson.*

Une unique source laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1064\,nm$ est dirigée vers une lame séparatrice semi-réfléchissante inclinée à 45° : cette lame sépare le faisceau incident en deux parts égales, l'une la traverse sans modification de direction, l'autre se réfléchit sur la lame.

On appelle *bras* les parties du montage correspondantes de longueur respective L_1 et L_2 (voir figure ci contre). Chacun des bras est terminé par un miroir plan qui renvoie la lumière vers la lame séparatrice. Un détecteur en sortie permet d'observer la superposition des ondes lumineuses provenant des deux bras de l'interféromètre.



La différence de distance parcourue par la lumière dans chacun des deux bras est à l'origine des interférences lumineuses observées au niveau du détecteur.

Q3. On considère deux ondes planes (unidimensionnelles) sinusoïdales de même pulsation ω, de phases à l'origine φ_1 et φ_2 et d'amplitudes $S_{m,1}$ et $S_{m,2}$. Montrer que la superposition de ces deux ondes est une onde sinusoïdale de même pulsation et établir l'expression de son amplitude.

Q4. A quoi correspondent des interférences constructives ? Destructives ? Exprimer l'amplitude de la l'onde résultante dans chaque cas.

Q5. Rappeler l'expression générale d'une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω et se propageant à la vitesse c.

Q6. Donner l'expression $s_1(t)$ du signal produit par l'onde sinusoïdale de longueur d'onde λ issue du laser, traversant la séparatrice, s'étant réfléchie sur le miroir M_1 puis sur la séparatrice et finalement reçue par le détecteur (on devra exprimer la distance totale parcourue par l'onde à l'aide des notations de la figure).

Q7. Donner de même celle du signal $s_2(t)$ issue du laser, issu de l'onde se réfléchissant sur le miroir M_2 et finalement détectée par le détecteur puis en déduire le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux signaux (2 par rapport à 1) en fonction de L_1, L_2 et λ.

En l'absence d'onde gravitationnelle, on note respectivement L_{01}, L_{02} les longueurs des bras de l'interféromètre alignés selon les axes x et y. Suite au passage d'une onde gravitationnelle, les longueurs des bras sont modifiées respectivement des quantités minuscules $\delta L_1(t)$ et $\delta L_2(t)$ de telle sorte que :

$$L_1(t) = L_{01} + \delta L_1(t) \ et \ L_2(t) = L_{02} + \delta L_2(t)$$

La longueur des bras de l'instrument est asservie de façon à ce que :

$$\frac{2\pi(L_{01} - L_{02})}{\lambda} = \frac{\phi_0}{2}$$

où ϕ_0 est une phase dont on déterminera la valeur optimale dans une question ultérieure.

On pose $\delta x = \delta L_1 - \delta L_2$.

Les deux ondes étant issues d'une même source, en l'absence d'atténuation elles ont la même amplitude $S_{m,0}$, elles ont également la même phase à l'origine, et on note $I_0 = 4\, {S_{m,0}}^2$.

Q8. Exprimer l'intensité I (carré de l'amplitude de la superposition) au niveau du détecteur, en présence d'une onde gravitationnelle, en fonction de I_0, de $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, de δx et de ϕ_0.

On suppose que $\frac{\delta x}{\lambda} << 1$, et on rappelle que lorsque $\varepsilon << 1$, on peut écrire au premier ordre en ε : $cos\,\varepsilon \approx 1$ et $sin\,\varepsilon \approx \varepsilon$

Q9. Exprimer I, au premier ordre en $\frac{\delta x}{\lambda}$ et montrer que $\delta I = I(\delta x) - I(\delta x = 0)$ se met sous la forme : $\delta I = A\, sin\, \phi_0$ où A est une constante indépendante de ϕ_0 que l'on exprimera.

Q10. Pour quelles valeurs de ϕ_0 cette variation d'intensité est-elle en valeur absolue maximale ? En déduire $L_{01} - L_{02}$ en fonction de λ.

Q11. Pour le détecteur Virgo, les bras mesurent 3 km au repos. La perturbation due à l'onde gravitationnelle provoque une variation relative infime $h = 10^{-23}$ de la longueur L_{01} (supposons $\delta L_2 = 0$). Donner un ordre de grandeur de δx et de la détection relative $\frac{\delta I}{I_0}$. Conclure.

La puissance du LASER n'est en fait pas rigoureusement constante au cours du temps, mais a tendance à fluctuer de façon aléatoire, ce qui fait varier la quantité I_0. Le dispositif précédent est modifié (non étudié ici) et l'éclairement dépend du temps selon la loi :

$$I\,(t) \approx I_0\,[m^2 + K\,\delta x\, cos(\Omega t) + m^2 cos(2\Omega t)]$$

où m et K sont des paramètres constants.

La chaîne de détection utilisée transforme ensuite l'éclairement reçu par le détecteur en une tension $V_d(t)$ proportionnelle à $I(t)$: $V_d(t) = \gamma I(t)$.

Q12. Expliquer le type de filtrage qu'il convient de faire subir à $V_d(t)$, pour en extraire la composante proportionnelle à δx.

Le filtre utilisé est modélisé par le circuit représenté sur la figure 3.

La fonction de transfert du montage $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \text{ où } H_0 = -\frac{k}{2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{k}}\frac{1}{RC} \ et \ Q = \sqrt{\frac{k}{2}}.$$

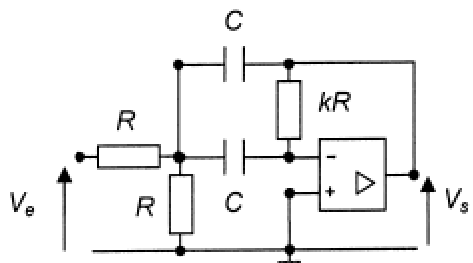


Figure 3 : Filtre

La tension d'entrée du filtre est la tension délivrée par la chaîne de détection : $V_d(t) = V_e(t)$.

Q 1 3 . A quelle condition entre ω_0 et Ω le filtre étudié est-il le mieux adapté pour extraire la composante « gravitationnelle » du signal $V_d(t)$?

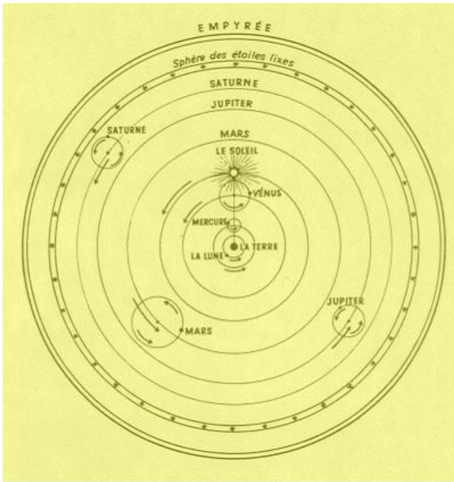
Q 1 4 . La condition précédente est supposée remplie. Montrer que le signal de sortie $V_S(t)$ est en fait la somme de deux composantes sinusoïdales de pulsations Ω et 2Ω dont les amplitudes, notées respectivement A_1 et A_2, seront précisées en fonction de $\gamma, I_0, m, K, \delta x, Q$ *et* H_0.

La tension de sortie $V_S(t)$ est ensuite elle-même filtrée pour obtenir une tension finale constante, dépendant de I_0 et δx.

Exercice 3 : Etude cinématique du mouvement apparent de Mars

On s'intéresse dans cette partie à la comparaison du système du monde antique de Ptolémée et au modèle héliocentrique de Copernic.

<u>Le modèle antique géocentrique des épicycles</u>



Dans ce modèle développé par l'astronome Claude Ptolémée au 2^e^ siècle de notre ère :

- *La Terre est immobile au centre du monde noté O (repère galiléen centré en O).*
- *Mars se déplace sur un petit cercle de rayon r_1 appelé épicycle avec la vitesse angulaire uniforme ω_1.*
- *Le centre C(t) de ce petit cercle tourne autour de la Terre à distance r_2, avec vitesse angulaire uniforme ω_2.*

Dans un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, Mars assimilé à un corpuscule M, possède initialement ($t = 0$) les coordonnées $(r_1 + r_2, 0)$.

Q15. Représenter $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t)$ sur une figure dans le repère cartésien puis exprimer ce vecteur en coordonnées cartésiennes dans la base cartésienne.

Q16. Exprimer le vecteur accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{CM}}$. En déduire les configurations géométriques pour lesquelles $a = ||\vec{\boldsymbol{a}}||$ est maximale et exprimer sa valeura_M.

Q17. Exprimer de même l'accélération minimale a_m.

Q18. Donner l'équation cartésienne de la trajectoire de $M(x, y)$ dans le cas particulier où $\omega_1 = -\omega_2$. Conclure sur la nature de cette trajectoire.

Nous ignorons qui dans l'histoire de l'humanité a introduit le système géocentrique à épicycles, mais une des motivations fût certainement de parvenir à expliquer les variations d'éclats des astres sans pour autant renonces au cercle qui par sa perfection convenait, dans l'esprit de l'antiquité, aux corps célestes.

Q19. Exprimer $r^2(t) = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right\|^2$. En déduire la période des changements d'éclat de Mars prévue par ce modèle.

Le modèle héliocentrique de Copernic

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_c$ centré sur le Soleil :

- *Mars, assimilé à un corpuscule M, décrit un cercle de rayon r_1, à vitesse angulaire ω_1.*
- *La Terre, assimilée à un corpuscule T, décrit un cercle de rayon r_2, à vitesse angulaire ω_2.*

Initialement $M(r_1, 0)$ et $T(r_2, 0)$.

Q20. Exprimer $\overrightarrow{\boldsymbol{TM}}(\mathrm{t})$ en coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}_c$.

Q21. Représenter sur une figure l'angle polaire $\theta = (\vec{\boldsymbol{u}}_x, \overrightarrow{\boldsymbol{TM}})$ puis exprimer $tan\,\theta$ en fonction des paramètres orbitaux des deux planètes et du temps.

On dit que Mars rétrograde dans le ciel lorsque son déplacement parmi les étoiles change de sens.

Q22. Quelle condition cela implique-t-il sur $(tan\,\theta)(t)$? Montrer que cette condition se ramène à la relation suivante : $cos[(\omega_1 - \omega_2)t] = f(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$ où $f(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$ est un facteur que l'on exprimera en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Q23. Les périodes orbitales et rayons orbitaux de Mars et de la Terre sont respectivement : $r_1 = 1{,}5\ UA$, $r_2 = 1\ UA, T_1 = 1{,}9$ an $et\ T_2 = 1$ an. Calculer numériquement f.

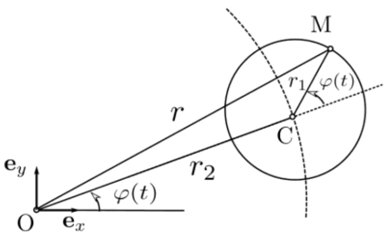
Q24. Représenter graphiquement $g(t) = cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$. Sachant que Mars est déjà en rétrogradation à la date t = 0, en déduire l'expression de la durée τ_r de rétrogradation de Mars.

Q25. Calculer numériquement τ_r en jours.

Approximation d'une orbite elliptique par un épicycle par Copernic

En réalité, l'orbite de Mars est elliptique. Copernic l'ignorait, et pour construire son système héliocentrique, il a conservé un épicycle ainsi qu'indiqué sur la figure ci-contre, pour lequel $r_1 << r_2$.

On rappelle que lorsque $|\varepsilon| << 1 : (1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\,\varepsilon$.



Q26. Exprimer r^2 en fonction de r_1, r_2 et φ en négligeant r_1^2 devant r_2^2.

Q27. On pose $\varepsilon = \frac{r_1}{r_2} << 1$. Exprimer r en fonction de r_2, φ et ε. En déduire que $r \approx r_2 + r_1\,h(\varphi)$ où $h(\varphi)$ est une fonction que l'on déterminera.

La trajectoire elliptique réelle de Mars s'écrit, dans $\mathcal{R}_c$, avec l'excentricité de l'orbite $e \approx 0{,}093$ et un paramètre p :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e\,cos\varphi}$$

Q28. Est-il est possible de décrire l'orbite de Mars à l'aide de deux épicycles ? Si oui, exprimer les rayons r_1 et r_2 en fonction de e et p.

FIN