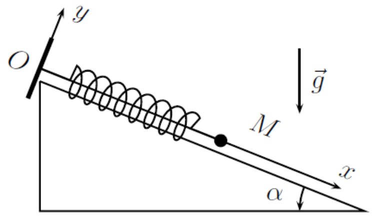
Oscillateurs mécaniques

Exercice 1 : Ressort sur plan incliné ★☆☆

- ✓ *Oscillateur mécanique*
- ✓ *Force de rappel élastique*
- ✓ *Oscillateur harmonique non amorti*

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0, sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement sur le plan incliné. On note g la norme du champ de pesanteur.

1) Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α.
2) On écarte le ressort de sa position d'équilibre de d. Etablir l'équation différentielle du mouvement. La commenter.



Exercice 2 : Oiseau carillonneur ★★☆

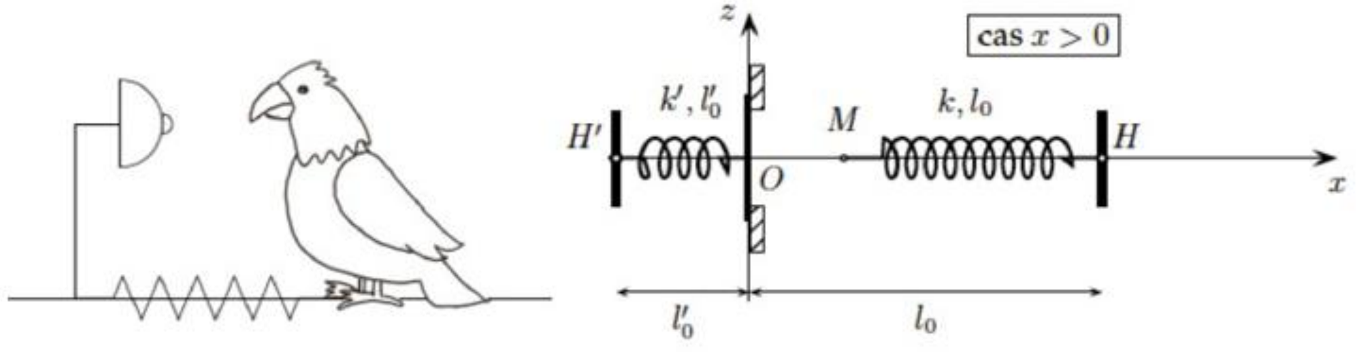
- ✓ *Oscillateur mécanique*
- ✓ *Force de rappel élastique*
- ✓ *Oscillateur harmonique non amorti*

On étudie le mouvement d'un jouet appelé oiseau carillonneur. Le jouet est constitué d'un oiseau qui peut se déplacer horizontalement et venir frapper une sonnette.

Afin de simplifier le problème, on se propose d'adopter la modélisation représentée ci-dessous : l'oiseau sera remplacé par un point matériel M de masse m, repéré par son abscisse x. Ce point est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Le point d'attache de ce ressort est le point H d'abscisse l_0 pour simplifier les calculs. La sonnette est située en O.

Pour modéliser le choc du nez de l'oiseau contre la sonnette, on introduit un deuxième ressort (beaucoup plus raide que le premier) de raideur k' et de longueur à vide l_0'. Ce deuxième ressort se termine par une plaque verticale contre laquelle viendra taper la masse. Cette plaque est bloquée en $x = 0$ par deux murs et l'abscisse de la plaque est donc nécessairement négative. Le deuxième ressort est fixé en H' d'abscisse $-l_0'$.

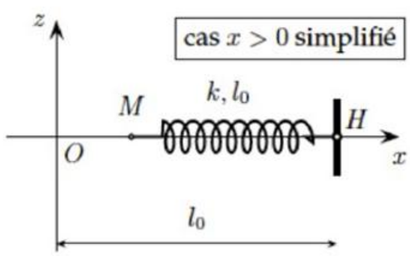
On suppose que le support horizontal sur lequel l'oiseau glisse selon Ox est bien lubrifié de façon à pouvoir négliger les frottements.

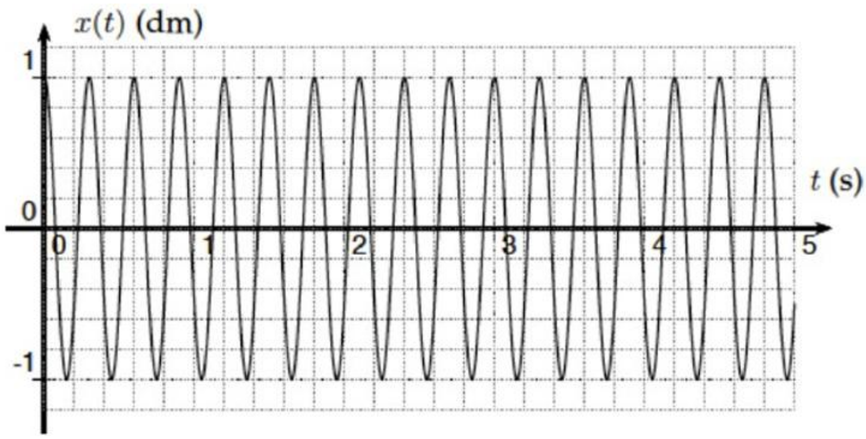


Étude de la première partie du mouvement, lâché de l'oiseau

Modélisation simplifiée :

Dans un premier temps, on enlève la partie sonnette et le problème peut se schématiser plus simplement (voir ci-dessous à gauche). La mesure de $x(t)$ donne la courbe représentée ci-dessous à droite.



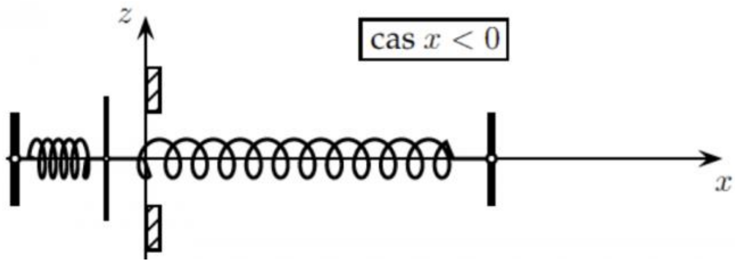


1) Exprimer la force de rappel du ressort s'exerçant sur l'oiseau, en fonction des données du problème. Vérifier le signe.
2) Etablie l'équation différentielle du mouvement de l'oiseau et préciser l'expression de la pulsation propre ω_0.
3) En utilisant le graphique, donner la valeur de l'amplitude x_m des oscillations et de la pulsation propre ω_0.
4) Déterminer graphiquement les conditions initiales du mouvement.
5) En déduire l'expression de $x(t)$ sous forme littérale.
6) À quel instant t_1 l'oiseau frappe-t-il pour la première fois la sonnette ? Exprimer t_1 en fonction de T_0.

Pour la suite, on prendra comme première partie du mouvement, l'équation $x(t)$ trouvée valable entre l'instant initial et t_1.

Choc avec la sonnette

On ajoute maintenant la sonnette en $x = 0$. Lorsque $x < 0$, le point M est donc soumis à l'action des deux ressorts. La masse de la plaque fixée au deuxième ressort sera supposée négligeable par rapport à la masse de l'oiseau. Le système est donc équivalent à un point M relié à deux ressorts, avec la contrainte $x < 0$.



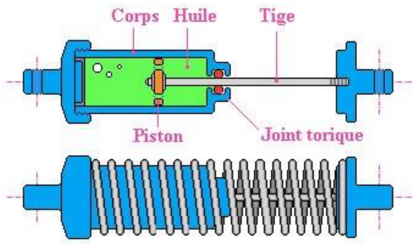
7) Quelle est la nouvelle équation différentielle régissant le mouvement du point M lorsque $x < 0$?
8) En déduire la nouvelle pulsation propre ω_0' et la nouvelle période T_0'. Comparer T_0 et T_0'.
9) Les conditions initiales sont ici $x(t_1) = 0$ et $x'(t_1) = v_1$. Résoudre l'équation différentielle compte tenu de ces conditions initiales.
10) A partir de quel instant t_2 cette solution n'est-elle plus valide ?

Exercice 3 : Suspension automobile ★★☆

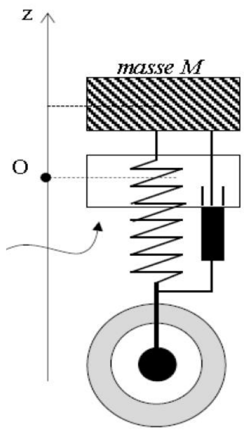
- ✓ *Oscillateur mécanique*
- ✓ *Force de rappel élastique*
- ✓ *Oscillations amorties*

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- D'un ressort métallique hélicoïdal de constante de raideur k (k = 1,8.10^4 N/m) et de longueur à vide l_0.
- D'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse et de coefficient d'amortissement α. (α = 1660 N.s/m).



Position à l'équilibre



On suppose que la masse M du véhicule chargé (M = 375 kg) est également répartie entre les quatre systèmes, on pose m = M/4.

Les pneus, de rayon extérieur R, sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude.

1) Le véhicule étant immobile, sans freins, sur un sol horizontal, déterminer la longueur l_{eq} des ressorts au repos en fonction de l_0, m, g et k.

Lors d'un essai dynamique, le châssis d'abord à l'équilibre est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale à une date prise comme origine des temps.

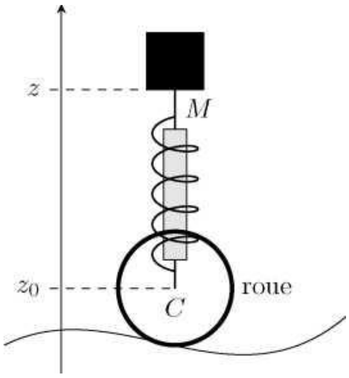
2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la grandeur $z(t)$, écart par rapport à la position d'équilibre.
3) Déterminer l'expression du facteur de qualité.
4) Quelle est la nature du mouvement du châssis ?
5) Déterminer l'expression de la solution $z(t)$ avec les conditions initiales proposées et donner son allure générale.
6) Pour qu'une voiture soit confortable, il faut que les oscillations aient une période adaptée à l'organisme humain, comme par exemple la période de marche qui vaut environ 1 s. Qu'en est-il du véhicule testé ?
7) Certaines suspensions sont conçues de telle façon à ce que $\alpha = \sqrt{kM}$. Quelle est la nature du mouvement correspondant à cette condition ? Quel est son avantage ?
8) Déterminer à nouveau l'expression de la solution $z(t)$ avec les conditions initiales proposées et donner son allure générale.

Exercice 4 : Suspension de VTT ★★★

- ✓ *Oscillateur mécanique*
- ✓ *Filtre mécanique*
- ✓ *Résonance mécanique*

Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT.

Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.



La suspension est quant à elle modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_o sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_o = 0$ correspondе à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α. L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force :

$$\vec{f} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\overrightarrow{u_z}$$

La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_o = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_e, en régime dit stabilisé.

On considère le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. Afin d'étudier les vibrations ressenties lorsqu'on roule sur une route bosselée, on pose la variable $Z(t) = z(t) - z_e$.

On montre que $Z(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = kz_0 + \alpha\dot{z}_0$$

1) Identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
2) On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t) = kz_0 + \alpha\dot{z}_0$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω. Justifier que la variable $Z(t)$ est également sinusoïdale de même pulsation que $F(t)$.
3) On introduit le paramètre adimensionné $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la rapport $\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{z_0}}$ en fonction de Q et x.
4) Etudier l'influence de x sur l'amplitude des vibrations.
5) Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Justifier.