Cinématique du point matériel

Exercice 1 : Parking hélicoïdal ★☆☆

- ✓ *Coordonnées cylindriques*

L'architecture de nombreux parkings souterrains est telle que la rampe mon tante reste à distance constante de l'axe du parking. On suppose la rampe d'inclinaison constante, et on raisonne sur une voiture se déplaçant dans le parking à vitesse constante v_0. On travaille en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) ascendant. La rampe est de rayon R et on note H la hauteur séparant deux étages. La hauteur z à laquelle se trouve la voiture est reliée à l'angle θ parcouru depuis son entrée dans le parking par $z(\theta) = \alpha\theta$.

1) Quelles sont les valeurs extrêmes prises par l'angle θ ? Déterminer α.
2) Exprimer le vecteur vitesse de la voiture en fonction de z, R et H. En déduire la durée Δt nécessaire pour qu'elle gravisse un étage.
3) Déterminer le vecteur accélération de la voiture et analyser physiquement l'expression.

Exercice 2 : Boulet humain ★☆☆

- ✓ *Mouvement à vecteur accélération constant*
- ✓ *Coordonnées cartésiennes*

Au cours d'un spectacle de cirque, en 1940, le boulet humain Emmanuel Zacchini fut projeté à une distance horizontale de 53 mètres. Pendant le lancé, son accélération est constante : $\overrightarrow{a} = -g\ \overrightarrow{e_z}$, avec $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$. L'axe Oz est vertical ascendant. On note v_0 sa vitesse initiale à la sortie du canon et α l'inclinaison de $\overrightarrow{v_0}$ avec l'horizontale Ox.
Le mouvement se fait dans le plan vertical Oxz.

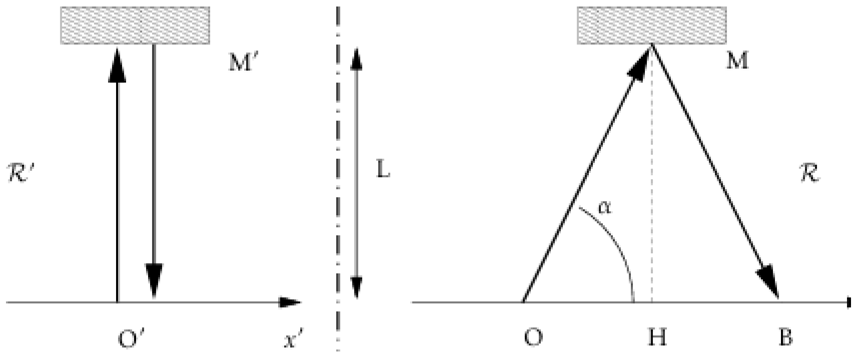
1) Etablir les équations horaires $z(t)$ et $x(t)$ du boulet.
2) En déduire l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature. Faire un dessin.
3) Si la vitesse initiale v_0 était de 87 km/h. Quel était l'angle de tir α ?

Exercice 3 : Dilatation des durées en mécanique relativiste ★★☆

✓ *Coordonnées cartésiennes*

On illustre dans cet exercice une conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière postulée par la relativité restreinte : la dilatation du temps dans un référentiel en mouvement. On considère deux observateurs, un chef de gare immobile sur son quai et un contrôleur, immobile dans un train se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V par rapport au quai. Dans tout l'exercice on distinguera le temps dans le référentiel du train R', noté t' de celui dans le référentiel (R) du quai, noté t. On supposera que les référentiels liés à la gare et au train sont bien galiléens.
À l'instant initial $t' = 0$, le contrôleur envoie une impulsion lumineuse (faisceau laser par exemple) verticalement vers un miroir situé à une distance D. Cet instant est également choisi comme l'instant $t = 0$ dans R. À cet instant, le contrôleur est en O', le chef de gare en O et $O = O'$.

1) On raisonne tout d'abord dans le référentiel R'. En admettant que la lumière s'y propage à c, quel est le temps T' mis par la lumière pour atteindre le miroir et revenir au contrôleur.
2) On admet que conformément à la théorie de la relativité restreinte, la lumière se propage également à c dans le référentiel R'. Compte-tenu du déplacement de M dans R durant la propagation lumineuse, son trajet y est triangulaire.
   a) Établir la relation entre l'angle α (fait par la direction du faisceau lumineux avec l'horizontale dans R), c, L et le temps T mis par la lumière pour revenir au contrôleur dans R.
   b) Établir une autre relation entre α, V et c. En déduire T.
   c) En conclure que l'invariance de la vitesse de la lumière dans les deux référentiels implique qu'on a $T = \gamma T'$,avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. Justifier alors le terme de « dilatation des durées » entre R et R'.



Exercice 4 : Chien à la poursuite de son maître ★★★

✓ *Coordonnées cartésiennes*

On considère deux demi-droites perpendiculaires (Ox) et(Oy). A l'instant $t = 0$, un homme part de O et parcourt l'axe (Oy) avec la vitesse constante v. Au même instant, son chien part d'un point A de l'axe (Ox), situé à la distance a de O, et se dirige constamment vers son maître en courant à la vitesse $2v$.

1) Montrer que l'équation différentielle de la trajectoire du chien est : $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$.
2) Vérifier que cette équation admet pour solution des fonctions de la forme $y = \frac{\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{2}} + \beta$ avec a et b constantes. Déterminer a et b.
3) À quel instant le chien rejoint-il son maître ?
4) Déterminer la longueur de la trajectoire parcourue par le chien.