# Dynamique du point matériel

## Exercice 1 : Viscosimètre à bille ★☆☆

- ✓ *Poussée d'Archimède*
- ✓ *Frottements fluides linéaires*
- ✓ *Mouvement rectiligne*

On étudie la chute d'1 bille sphérique en acier de masse volumique $\rho = 7800$ kg.m$^{-3}$ et de rayon r = 1 mm dans de la glycérine (de masse volumique $\rho_f = 1260$ kg.m$^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1,2$ Pa.s). On admet que la vitesse de la chute est suffisamment faible pour modéliser la force de frottement par 1 loi linéaire et que le coefficient de frottement fluide $\alpha$ est tel que $\alpha = 6\pi\eta r$. A t = 0, on lâche la bille sans vitesse initiale.

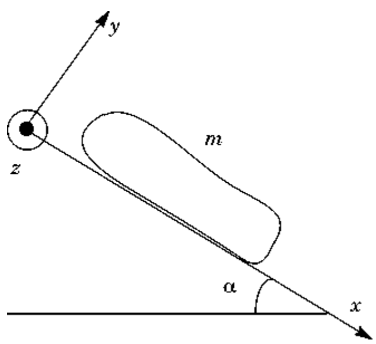
1) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la bille et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse. On posera $\tau = \rho V/\alpha$ avec V le volume de la bille.
2) Résoudre.
3) Déterminer la vitesse limite de chute.
4) Expliquer le principe d'un viscosimètre.

## Exercice 2 : Mécanique des avalanches ★☆☆

- ✓ *Réaction du support*
- ✓ *Mouvement rectiligne*

Dans une avalanche, une masse de neige se détache sur une pente et la dévale en entraînant avec elle de la matière supplémentaire. Il en résulte une amplification qui conduit à un phénomène violent même à partir d'un déséquilibre faible.

On considère un bloc de neige de masse m reposant sur un plan incliné dont la pente est repérée par l'angle $\alpha$. Le contact entre la neige et ce plan, décrit par les lois de COULOMB sur le frottement, est caractérisé par des coefficients de frottement statique $\mu_s$ et dynamique $\mu_D$. On rappelle que $\mu_D < \mu_s$. On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note g = 9,8 m.s$^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.



1) Montrer que l'équilibre est possible tant que $\alpha < \alpha_c$ et exprimer l'angle critique $\alpha_c$.
2) La masse de neige en équilibre sur une pente d'angle $\alpha_c$ subit une légère perturbation qui lui donne une vitesse initiale $v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $v_0 > 0$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, exprimer dv/dt en fonction des différents paramètres du problème.
3) En déduire l'expression de la vitesse v(t).
4) L'énergie acquise sert en fait à mettre en mouvement de nouveaux blocs de neige, conduisant à l'amplification de l'avalanche. Les valeurs approximatives de $\mu_s$ et $\mu_D$ sont données dans le tableau ci-dessous pour différents types de neige. Commenter en utilisant les questions précédentes. Quel type de neige conduit aux avalanches les plus violentes ? On justifiera la réponse.

| Type de neige : | $\mu_S$ | $\mu_D$ |
|---|---|---|
| Neige fraîche | Jusqu'à 10 | 0,3 |
| Neige en gobelets | 1,2 | 0,7 |
| Neige à grains ronds | 1,2 | 0,4 |

5) Animée d'une vitesse $v_1$, la masse de neige arrive dans une région où l'angle $\alpha$ prend une valeur plus faible, constante. A quelle condition portant sur $\alpha$ le mouvement est-il ralenti puis stoppé ? APPLICATION NUMERIQUE : exprimer cette condition pour les trois types de neige.

## Exercice 3 : Descente en luge ★★☆

- ✓ *Réaction du support*
- ✓ *Mouvement circulaire*

On assimile un ensemble {luge + lugeur} à un point matériel M de masse $m$ = 100 kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à g = 10 m.s$^{-2}$.

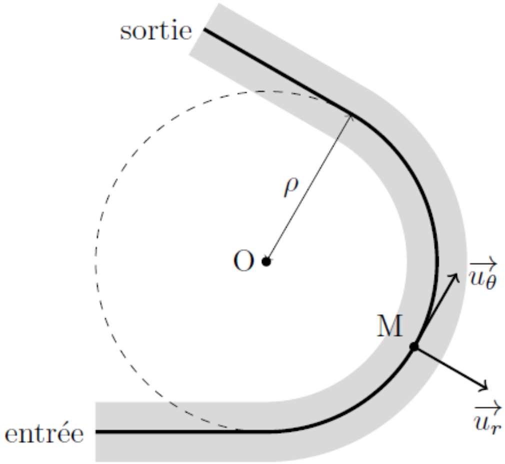
**Descente rectiligne** :

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0$ = 5,0 m.s$^{-1}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle $\alpha$ l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

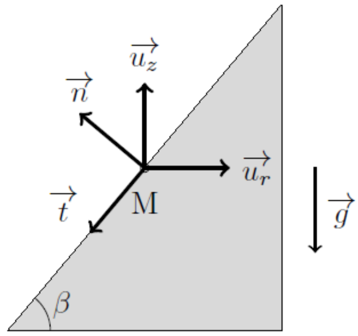
1) Exprimer et calculer numériquement l'accélération $a$ de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur $g$ et de l'angle $\alpha$.
2) L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée $t_a$ la luge atteint-elle la vitesse $v_a$ = 30 m.s$^{-1}$ ? Application numérique.
3) Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse $v_a$ ? Application numérique.

**Virage circulaire :**

M est maintenant en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon $\rho$. La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in ]0 ; \pi/2[$. La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\vec{v} = V\,\overrightarrow{u_\theta}$. Le trièdre de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\, \overrightarrow{u_z})$ est orthonormé direct. On désigne par $\vec{R} = R_n\,\vec{n} + R_t\,\vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\vec{n}$ (normal) et $\vec{t}$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.




Vue de dessus de la piste




Vue en coupe de la piste

4) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de $V, \rho$ et de $\overrightarrow{u_r}$. Justifier physiquement le sens de l'accélération.
5) La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère $(\vec{n}, \vec{t})$.
6) En déduire les expressions des réactions $R_n$ et $R_t$ en fonction de V, $\rho$, $\beta$, $g$ et $m$.
7) Soit $f = 0{,}4$ le coefficient de frottement de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_t| \leq f\, R_n$. Dans la suite des questions, un dérapage possible vers l'extérieur du virage, soit $R_t > 0$.
   a) Montrer que $V^2$ doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :
   $V^2\,(\cos\beta - f\sin\beta) \leq g\,\rho(\sin\beta + f\cos\beta)$
   b) En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse $V$. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient $f$. Faire l'application numérique en degrés.

## Exercice 4 : Parabole de sûreté ★★☆

✓ *Mouvement dans le champ de pesanteur*

On s'intéresse au mouvement (dans le référentiel terrestre) d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre, en l'absence de frottement. Il est toujours lancé avec une vitesse de même norme $v_0$ mais de direction variable.

1) Retrouver l'équation de la trajectoire si le point est lancé de l'origine du repère cartésien avec une vitesse initiale faisant un angle α avec l'horizontale.
2) En supposant la norme $v_0$ constante mais l'angle α variable, établir l'équation de la courbe dans le plan séparant les points pouvant être atteints de ceux qui ne le seront jamais. Justifier le terme de parabole de sûreté.

## Exercice 5 : Saut d'un ressort ★★☆

✓ *Rection du support*
✓ *Force de rappel élastique*

Deux masses ponctuelles sont placées aux extrémités d'un ressort élastique de longueur à vide $l_0$ et de raideur $k$. Le point $A$ de masse $M$ est en contact avec le sol. Le point $P$ de masse m est situé à l'extrémité supérieure. On suppose que les masses se déplacent uniquement le long de l'axe vertical $(Ox)$. Dans un premier temps on suppose que le point A est fixe.

1) Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.
2) À la date $t = 0$ on lance le point $P$ verticalement, vers le haut, avec une vitesse $v_0$, depuis sa position d'équilibre. On définit l'origine $O$ du repère au niveau de cette position d'équilibre.
3) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du point $P$. Exprimer la période des oscillations.
4) Déterminer $x(t)$ à tout instant $t > 0$. Quelle est l'amplitude des oscillations ?

Dans les questions qui suivent on cherche à savoir si la masse $M$ située en $A$ peut décoller du sol.

5) Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le point $A$.
6) Exprimer en fonction du temps la réaction du sol sur le point $A$, tant que le contact est maintenu.
7) Montrer que $A$ décolle à condition que $P$ soit lancé avec une vitesse initiale supérieure à une valeur $v_m$ que l'on exprimera en fonction des données du problème.