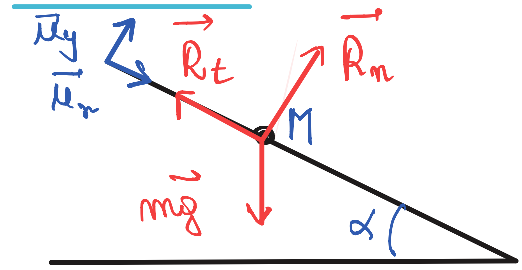
Correction TD12

Exercice 1 :



<u>Système</u> : {morceau de verre}

<u>Réf</u> : terrestre supposé galiléen

1) <u>BdF</u> :
- poids $m\vec{g}$
- réaction du support $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$

<u>PFD appliqué à M</u> : $\underbrace{m\vec{a}}_{\vec{0} \text{ car immobile}} = m\vec{g} + \vec{R}_t + \vec{R}_n$

<u>Projection dans $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$</u> :

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\alpha - \|\vec{R}_t\| \\ 0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{R}_n\| \end{cases}$$

$\|\vec{R}_t\| = mg\sin\alpha$ $\qquad$ $\|\vec{R}_n\| = mg\cos\alpha$

2) Condition de non glissement : $\|\vec{R}_t\| \leq \mu \|\vec{R}_n\| \iff \sin\alpha \leq \mu\cos\alpha$

$$\iff \tan\alpha \leq \mu$$

3) AN : $\mu = \tan 35 = 0{,}7$

4) Selon $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \|\vec{R}_t\|$

Selon $\vec{u}_y$: $0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{R}_n\| \Rightarrow \|\vec{R}_n\| = mg\cos\alpha$

$\|\vec{R}_t\| = \mu mg\cos\alpha$

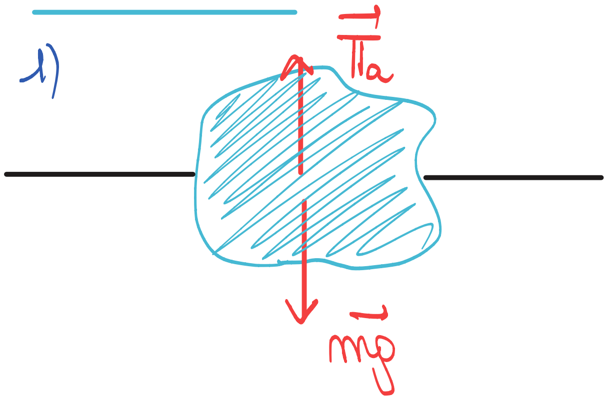
$\rightarrow \ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = Cte$

$\dot{x}(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,t$ $\quad (\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_{te} = 0)$

$x(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,\dfrac{t^2}{2}$ $\quad (x(0) = 0 \Rightarrow C_{te} = 0)$

Exercice 2 :

1)



On ne tient compte que de la poussée d'Archimède exercée par l'eau ($\rho_{eau} \gg \rho_{air}$) $\simeq 1\,kg/m^3$

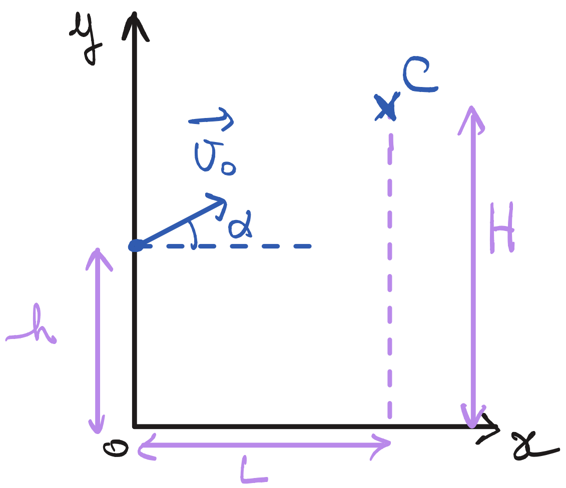
2) On applique le PFD à l'iceberg dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{\Pi}_a + m\vec{g} = \vec{0}$ à l'équilibre

Selon la verticale ascendante : $\rho_2 \underbrace{(V_t - V_e)}_{\text{volume immergé}} g - \rho_1 V_t g = 0$

$V_t - V_e = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} V_t \rightarrow \boxed{\dfrac{V_e}{V_t} = 1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}}$

3) $V_t = 5{,}39 \times 10^3\, m^3 \rightarrow m = 4{,}90 \times 10^6\, kg$

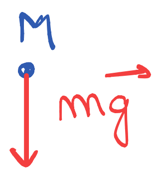
Exercice 3 :



Système : {ballon}

Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : le poids $m\vec{g}$



1) PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

dans $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$: $\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \to \dot{x} = \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \\ \to \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{matrix}$

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha) t \qquad y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 \sin\alpha) t + h$$

2) $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \rightarrow y(x) = -\dfrac{g x^2}{2(v_0\cos\alpha)^2} + \tan\alpha\, x + h$

3) 2 méthodes : $\dfrac{dy}{dt} = 0$ ou $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$y_{max} = y\left(t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)$

$y_{max} = -\dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} + h$

$-\dfrac{g x}{(v_0\cos\alpha)^2} + \tan\alpha = 0$

$x = v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha / g$

$y_{max} = y\left(x = \dfrac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}\right)$

$y_{max} = -\dfrac{\cancel{v_0^2} \cancel{\cos^2\alpha} \sin^2\alpha}{2g \cancel{v_0^2} \cancel{\cos^2\alpha}} + \cancel{\tan}\alpha \dfrac{v_0^2 \cancel{\cos}\alpha \sin\alpha}{g} + h$

$$y_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

4) le panier est marqué si le ballon passe par C : $y(x_C) = y_C \Leftrightarrow y(L) = H$

$-\dfrac{g L^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + L \tan\alpha - H + h = 0 \qquad \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

On pose $X = \tan\alpha$

$\rightarrow \dfrac{-g L^2}{2 v_0^2}(1 + X^2) + LX - H + h = 0$

$$-\frac{L^2}{2v_0^2}X^2 + LX - \left(H - h + \frac{L^2}{2v_0^2}\right) = 0$$

La résolution de cette équation du 2^{nd} degré aboutit à 2 solutions réelles > 0 :

$X_1 = 2,85$ $\quad X_2 = 0,54$ $\quad$ et donc 2 valeurs de $\alpha \in [0, \pi/2]$

$\alpha_1 = 70°$ $\quad \alpha_2 = 28°$

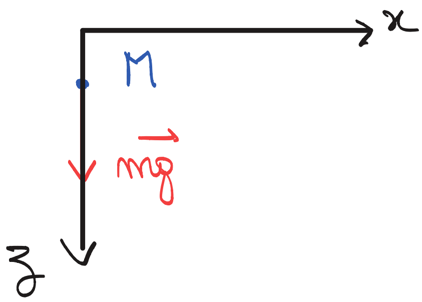
Exercice 4

1) Système : {parachutiste}

Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : poids $m\vec{g}$

PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$



selon O_z : $\ddot{z} = -g$ $\quad \dot{z}(t) = -gt$ $\quad$ ($\dot{z}(0) = 0$ car vol stationnaire)

$v_1 = \|\vec{v}\| = g t_1$ $\quad v_1 = 98,1 \, m.s^{-1}$

2) a) on ajoute la force de frottement dans le BdF.

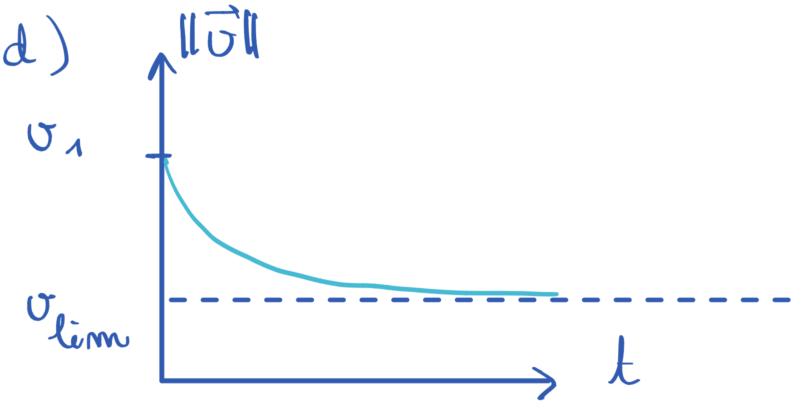
PFD $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$ $\quad$ on pose $\tau = \frac{m}{k}$

b) $\vec{v} = \vec{A}\exp(-t/\tau) + \frac{m\vec{g}}{k}$ $\quad \vec{v}(0) = v_1 \vec{u}_z$ $\quad$ ($t = 0$ à l'ouverture du parachute)

$$\vec{v} = \left[\left(v_1 - \frac{mg}{k}\right)\exp(-t/\tau) + \frac{mg}{k}\right]\vec{u}_z$$

c) $\|\vec{v}\| \to \frac{mg}{k}$ quand $t \to \infty$ $\quad v_{lim} = \frac{mg}{k} = 9,81 \, m.s^{-1}$

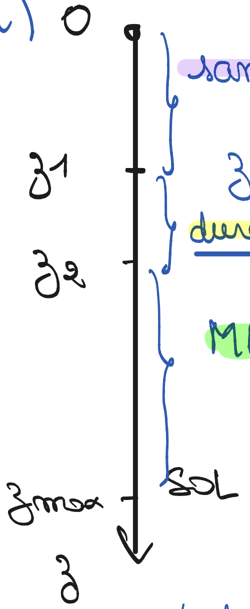
d)



e) On peut supposer que la vitesse limite est atteinte au bout de 5τ.

AN : $5\tau = 5\frac{m}{k} = 5\,s$ Cette durée est sûrement négligeable devant la durée totale du saut.

d)



sans parachute   durée : 10 s $\leftarrow \Delta t_1$

$z_1 = z(t_1) = g\frac{t_1^2}{2} = 490{,}5\,m \implies z_{max} - z_1 = 3509{,}5\,m$

durée 5 s   Phase transitoire $\leftarrow$ on néglige cette phase

MRU $v = v_{lim} = 9{,}81\,m.s^{-1}$

durée $\Delta t_2 \simeq \frac{z_{max} - z_1}{v_{lim}}$ entre z_1 et z_{max}

Durée totale : $\Delta t \simeq \Delta t_1 + \Delta t_2 \simeq 10 + \frac{z_{max} - z_1}{v_{lim}} = 367\,s$

Ici, on a fait 1 calcul très simple en négligeant la phase transitoire.
La durée totale est surestimée car entre z_1 et z_2 $v > v_{lim}$.

On peut être plus précis en calculant la distance parcourue entre z_1 et z_2.

↳ $z_2 - z_1 = \int_0^{5\tau} v\,dt = -\tau(v_1 - v_{lim})(\exp(-5) - 1) + v_{lim}5\tau = 137\,m$

$\Delta t = 10 + 5 + \frac{3509{,}5 - 137}{9{,}81} \simeq \underline{357\,s}$

Exercice 5 :

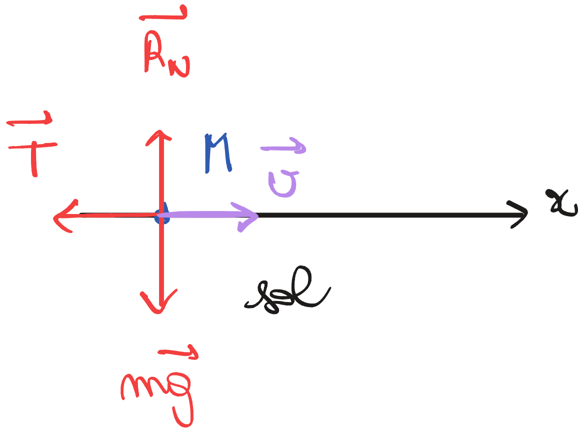
1) Système : {avion}

Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids $m\vec{g}$

. réaction normale du sol $\vec{R_N}$

. force de traînée $\vec{T}$



PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{T}$

Selon Ox : $m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}C_x\rho S v^2$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{C_x\rho S}{2m}v^2 = 0}$$

2) On peut faire une séparation de variable : $-\frac{1}{v^2}dv = \frac{C_x\rho S}{2m}dt$

On intègre entre $t=0$ et t : $\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_a} = \frac{C_x\rho S}{2m}t$

$$\frac{1}{v} = \frac{C_x\rho S}{2m}t + \frac{1}{v_a}$$

On pose $\frac{C_x\rho S}{2m} = k$ $\boxed{v(t) = \frac{v_a}{1+kv_at}}$

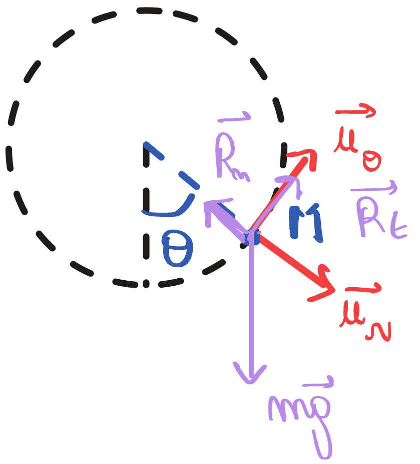
3) $d = \int_0^{t_1} v\,dt = \left[\frac{1}{k}\ln(1+kv_at)\right]_0^{t_1} = \frac{1}{k}\ln(1+kv_at_1)$

$$1 + k v_a t_1 = \exp(kd)$$

$$v(t_1) = \frac{v_a}{\exp(kd)} = \frac{241/3,6}{\exp\left(\frac{1}{2} \times 1,5 \times 1,2 \times \frac{\pi \times 3^2}{4} \times \frac{1}{9 \times 10^3} \times 1400\right)} = 24,9\ m.s^{-1}\ (= 90\ km.h^{-1})$$

Exercice 6

1)



Système : {chaussette}

Réf : terrestre supposé galiléen

BdF :
- poids $m\vec{g}$
- réaction du support $\vec{R_n} + \vec{R_t}$

2) **PFD** : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_n} + \vec{R_t}$

3) Perte de contact $\Leftrightarrow \|\vec{R_n}\| = 0$

On projette selon $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

$-mR\dot{\theta}^2 =$	$mg\cos\theta - \|\vec{R_n}\|$
0	$\|\vec{R_t}\| - mg\sin\theta$

Tant que la chaussette est en contact, le mouvement est circulaire uniforme ($\dot{\theta} = 50$ tr/min).

Rupture de contact : $mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2$ $\quad \cos\theta = -\frac{R\dot{\theta}^2}{g}$

$\theta = 134°$

4) Mouvement ultérieur : chute libre, parabolique si on néglige les frottements.

Exercice 7 :

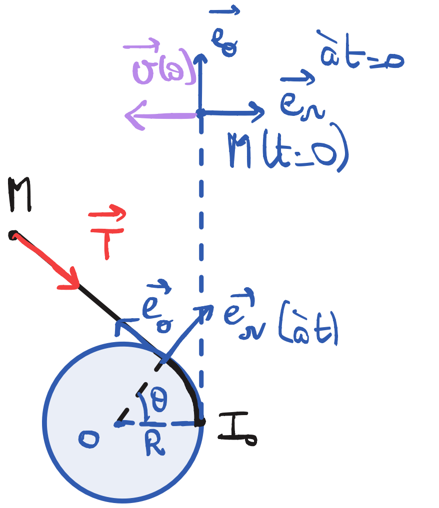
1) $\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM} = R\vec{e_r} + (L-R\theta)\vec{e_\theta}$ $(\widehat{I_0 I} = R\theta)$

2) $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot\theta \vec{e_\theta} + (L-R\theta)(-\dot\theta\vec{e_r}) - R\dot\theta\vec{e_\theta}$

$$\vec v = -(L-R\theta)\dot\theta\vec{e_r}$$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = R\dot\theta^2\vec{e_r} - (L-R\theta)\ddot\theta\vec{e_r} - (L-R\theta)\dot\theta^2\vec{e_\theta}$

$$\vec a = (R\dot\theta^2 - \ddot\theta(L-R\theta))\vec{e_r} - (L-R\theta)\dot\theta^2\vec{e_\theta}$$



3) Système : {masse m}

Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : tension du fil $\vec T$ (poids négligé)

PFD : $m\vec a = \vec T$ $\vec T$ est selon $(-\vec{e_\theta})$ $\Rightarrow$ $\vec a\cdot\vec{e_r} = 0 \iff \underbrace{-(L-R\theta)\dot\theta}_{\|\vec v\|} = Cte$

Le mouvement est donc uniforme. $\|\vec v\| = v_0$

4) $\vec v = -(L-R\theta)\dot\theta\vec{e_r}$ $\vec v(0) = -v_0\vec{e_r}$

D'après 3) $(L-R\theta)\dot\theta = v_0$

$L\dot\theta - R\theta\dot\theta = v_0$

On intègre entre 0 et t : $L(\theta(t)-\theta(0)) - \frac{R}{2}\left(\theta(t)^2-\theta(0)^2\right) = v_0 t$

$\theta(0)=0 \Rightarrow \frac{R}{2}\theta^2 - L\theta + v_0 t = 0$

Le fil est totalement enroulé lorsque $\theta = \theta_{max} = \frac{L}{R}$

$\frac{R}{2} \theta_{max}^2 - L\theta_{max} + v_0\tau = 0$

$\frac{L^2}{2R} - \frac{L^2}{R} + v_0\tau = 0$

$$\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}$$

$$\Delta = L^2 - 4\frac{v_0 \times Rt}{2} = L^2 - 2v_0Rt = L^2 - L^2\frac{t}{\tau}$$

$0 \leq t \leq \tau \Rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow$ 2 solutions réelles $\theta(t) = \dfrac{L \pm \sqrt{\Delta}}{R}$

$\theta \leq \theta_{max} = \dfrac{L}{R} \Rightarrow \theta(t) = \dfrac{L - \sqrt{L^2 - 2v_0tR}}{R}$

5) PFD : $-m(L-R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta = \vec{T}$

le fil reste tendu si $\vec{T} = -T\vec{e}_\theta$ avec $T>0$.

$T = m\underbrace{(L-R\theta)}_{>0 \text{ tant que } \theta < \theta_{max}}\underbrace{\dot{\theta}^2}_{>0} \rightarrow$ le fil reste tendu

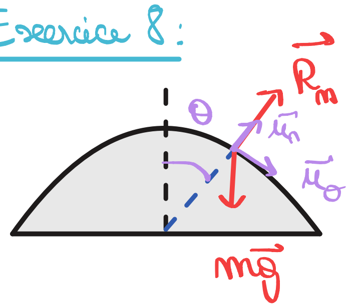
Remarque :

$(L-R\theta)\dot{\theta} = -v_0$

$\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{L-R\theta}$

$T = \dfrac{mv_0^2}{L-R\theta} = \dfrac{mv_0^2}{L\sqrt{1-t/\tau}}$

Exercice 8 :



Système : {enfant}

Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : • poids $m\vec{g}$

• $\vec{R}_n$

1) PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_n$

Dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\begin{vmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -mg\cos\theta + \|\vec{R}_n\| \\ mg\sin\theta \end{vmatrix}$$

$\rightarrow R\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$

2) $R\ddot{\theta}\dot{\theta} - g\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$

On intègre entre $t=0$ et t : $R\left(\dfrac{\dot{\theta}^2(t)}{2} - \dfrac{\dot{\theta}^2(0)}{2}\right) + g(\cos\theta(t) - \cos\theta(0)) = 0$

CI : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

$\rightarrow R\dfrac{\dot{\theta}^2}{2} + g(\cos\theta - 1) = 0$

3) Rupture de contact : $\|\vec{R}_n\| = 0$ $\quad \|\vec{R}_n\| = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$

$\|\vec{R}_n\| = 2mg(\cos\theta - 1) + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta - 2mg$ $\quad \|\vec{R}_n\| = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{3}$

$(\theta \in [0, \pi/2])$ $\quad \theta = 48°$

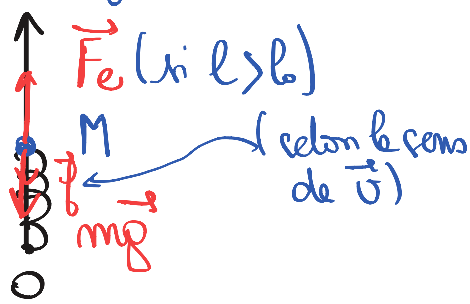
Exercice 9 :

1) **Système** : {Zébulon} **Réf** : terrestre supposé galiléen

BdF : • poids $m\vec{g}$

• force de rappel élastique

• force de frottement



PFD : $m\vec{a} = -k(l-l_0)\vec{u_z} + m\vec{g} - \alpha\vec{v}$ ici $l = z$

$\vec{v} = \dot{z}\vec{u_z}$

Selon Oz : $m\ddot{z} + kz + \alpha\dot{z} = kl_0 - mg$

2) Forme canonique : $\ddot{z} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\frac{\omega_0}{Q}}\dot{z} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} z = \frac{k}{m}\underbrace{\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)}_{z_{eq}}$ OHA

z_{eq} : position à l'équilibre.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

3) Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ ou $Q > 1/2$

$$z(t) = z_{eq} + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$ pseudo-pulsation

4) durées identiques donc $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ ne change pas.

$\tau = 2\frac{\sqrt{km}}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2m}{\alpha}$ m n'est pas affectée par le vieillissement.

5) Q = nb d'oscillations $Q \searrow$ avec le temps.

m et α constante $Q \searrow \Longleftrightarrow k \searrow$ avec le temps

6) On peut utiliser le décrément logarithmique

$$\delta = \ln \frac{Z(t)}{Z(t+T)} = \frac{\omega_0 T}{2Q} \qquad \ln \frac{1}{0{,}8} = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$\rightarrow Q = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4\pi^2}{\left(\ln(1/0{,}8)\right)^2}\right) = 7$$

7) $[\alpha v] = M.L.T^{-2}$

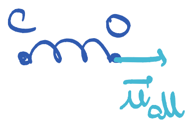
$$[\alpha] = \frac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.T^{-1} \qquad \alpha \text{ en } kg.s^{-1}$$

8) $$\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q} = 0{,}57 \; kg.s^{-1}$$

Exercice 8 :

1) Système : $\{O\}$ Réf : terrestre supposé galiléen

$\vec{u}_{all} = \vec{u}_x$

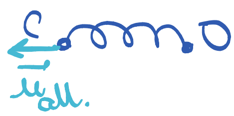


$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(l - l_0) \qquad l = x_2 - x_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) \quad (1)$$

2) Système : $\{C\}$ m̂ chose mais ⚠ pour C, le ressort s'étire selon $-\vec{u}_x$

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(l - l_0)$$



$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0) \quad (2)$$

3) $(1)+(2) \Longleftrightarrow \ddot{s} = 0$

$$\frac{(2)}{m_1} - \frac{(1)}{m_2} \Longleftrightarrow \ddot{d} + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) d = -\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) l_0$$

4) $\dot{s} = Cte = 0$ (atomes immobiles)

$s = Cte \qquad s = m_1 x_{10} + m_2 x_{20}$

On pose $\omega_0 = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$

Pour d, on reconnait 1 OHNA : $d(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi) - \ell_0$

$d(0) = x_{10} - x_{20} = A\cos\varphi - \ell_0$

$\dot{d}(0) = 0 = -A\omega_0 \sin\varphi$ on prend $\varphi = 0$

$$d(t) = (x_{10} - x_{20} + \ell_0)\cos(\omega_0 t) - \ell_0$$

5) On découple :

$x_2 = x_1 - d$ $\qquad s = m_1 x_1 + m_2 x_1 - m_2 d$

$x_1 = \dfrac{s + m_2 d}{m_1 + m_2}$ $\qquad x_2 = \dfrac{s - m_1 d}{m_1 + m_2}$

On remplace :

$$x_1(t) = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left((x_{10} - x_{20} + \ell_0)\cos(\omega_0 t) - \ell_0\right)$$

$$x_2(t) = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left((x_{10} - x_{20} + \ell_0)\cos(\omega_0 t) - \ell_0\right)$$

6) $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{k\, m_1 m_2}}$

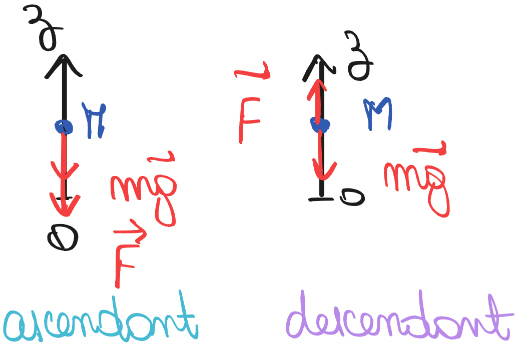
7) Si $m_1 \gg m_2$: $x_1 \simeq x_{10}$ l'atome lourd est quasi fixe

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_2}}$ pulsation des oscillations non amorties d'1 masse m reliée à 1 ressort de raideur k.

Exercice 9 :

1) **Système** : {boulet de canon}   **Réf** : terrestre supposé galiléen

BdF :
- poids
- force de frottement



PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} - \gamma v \vec{v}$ $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \gamma v \vec{v}$ $v = \|\vec{v}\|$

- mouvement ascendant : $m\dfrac{dv}{dt} = -mg - \gamma v^2$ $(\vec{v} = v\vec{u}_z)$
- mouvement descendant : $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2$ $(\vec{v} = -v\vec{u}_z)$

2) Cas descendant : au début de cette phase $v = 0$ et $\dfrac{dv}{dt} > 0$

v augmente mais quand $\gamma v^2 = mg$ $\dfrac{dv}{dt} = 0$ $v = C^{te}$

Cas ascendant : au début $v > 0$, $\dfrac{dv}{dt} < 0$

v diminue jusqu'à s'annuler.

3) $v_{lim} = \sqrt{\dfrac{mg}{\gamma}}$

4) Mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_{lim}.

5) Sur la courbe du module de la vitesse, on observe une diminution de v jusqu'à une annulation (phase ascendante) puis v réaugmente : le régime est d'abord transitoire puis semble devenir permanent (phase descendante).

Phase ascendante : $z \nearrow$ jusqu'à $z_{max} = 3900\,m$ ($\dot{z} = 0$, $v = 0$)

Phase descendante : $z \searrow$, $\dot{z} \to Cte$ (<0)

6) Phase ascendante : $0 \leq t \leq t_1$ $\quad \frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m} v^2 = -g \quad (1)$

$$v_{lim}^2 = \frac{mg}{\gamma} \qquad v = u\, v_{lim} \qquad t = \tau \theta \qquad \tau = \sqrt{\frac{m}{\gamma g}}$$

(1) peut s'écrire : $\frac{v_{lim}}{\tau} \frac{du}{d\theta} + \frac{v_{lim}^2 \gamma}{m} u^2 = -g$

$$\frac{du}{d\theta} + \underbrace{\frac{v_{lim} \tau \gamma}{m}}_{=1} u^2 = \underbrace{-g \frac{\tau}{v_{lim}}}_{1}$$

$$\frac{du}{d\theta} + u^2 = -1 \rightarrow \frac{du}{d\theta} = -(1+u^2)$$

$$\frac{du}{1+u^2} = -d\theta \qquad \arctan(u) = -\theta + Cte$$

à $t = 0$ $\quad v = v_0 \quad u = \frac{v_0}{v_{lim}} \quad \theta(0) = 0 \Rightarrow Cte = \arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right)$

$$v_+(t) = v_{lim} \tan\left(-\frac{t}{\tau} + \arctan \frac{v_0}{v_{lim}}\right)$$

Phase descendante $(t \geq t_1)$ $\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m} v^2 = g$

De la même façon on obtient l'équation adimensionnée :

$$\frac{du}{d\theta} + u^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{du}{1-u^2} = d\theta$$

$\text{arctanh}(u) = \theta + Cte$

à $t = t_1$ $u = 0$ car $v = 0$ et $\theta = \frac{t_1}{\tau}$ $\rightarrow$ $Cte = -\frac{t_1}{\tau}$

$$v_-(t) = v_{lim} \tanh\left(\frac{t - t_1}{\tau}\right)$$

7) $v_{lim} \simeq 160 \text{ m/s}$

$t_1 \simeq 22 \text{ s}$ $\quad v_+(t_1) = 0 \iff \frac{t_1}{\tau} = \arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right)$

$$\tau = \frac{t_1}{\arctan \frac{v_0}{v_{lim}}} \simeq 16 \text{ s}$$

$$\gamma = \frac{m}{\tau^2 g} \simeq 4{,}7 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}$$