TD 15 – Introduction à la mécanique quantique

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Dualité onde-particule pour la lumière et la matière
→ Le photon : Energie, vitesse, masse, impulsion.
→ Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
→ Effet photoélectrique : interpréter qualitativement l'effet photoélectrique à l'aide du modèle particulaire de la lumière. Etablir, par un bilan d'énergie, la relation entre l'énergie cinétique des électrons et la fréquence.
→ Expliquer qualitativement le fonctionnement d'une cellule photoélectrique.
→ Absorption et émission de photons : citer quelques applications actuelles mettant en jeu l'interaction photon-matière (capteurs de lumière, cellules photovoltaïques, diodes électroluminescentes, spectroscopies UV-visible et IR, etc.)
→ Onde de matière associée à une particule : relation de de Broglie.
→ Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière.
→ Evaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.

***J'apprends mon cours :** exercices 1, 2, 3*

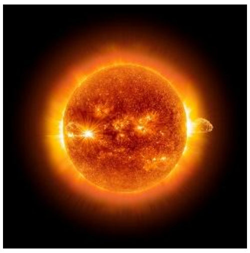
Exercices

Exercice 1 : Rayonnement solaire ★☆☆
Ref. 0118

✓ *Energie d'un photon*

Le flux solaire au niveau du sol terrestre vaut, par beau temps, environ $\Phi_S = 10^3\ W.m^{-2}$.

1) En prenant, pour les photons solaires, une longueur d'onde moyenne $\lambda_m = 0{,}5\ \mu m$, trouver l'ordre de grandeur du nombre de photons reçus par un capteur solaire de surface $S = 1\ m^2$ pendant $\Delta t = 1\ s$.
2) Il est possible de voir à l'œil nu une étoile de magnitude 6,5. La magnitude m est reliée au flux d'énergie Φ provenant de l'étoile par la relation $m - m_0 = -2{,}5\ log\ \frac{\Phi}{\Phi_0}$, où m_0 et Φ_0 correspondent à une étoile de référence. La magnitude du Soleil est égale à −26,8. Trouver l'ordre de grandeur du nombre de photons provenant d'une étoile de magnitude 6,5 entrant pendant $1\ s$ dans un oeil dont la pupille, ouverte au maximum, a un diamètre de $7\ mm$. On prendra pour longueur d'onde moyenne des photons de l'étoile la même valeur que pour les photons solaires (hypothèse valide si la température de l'étoile est proche de celle du Soleil).



Exercice 2 : Cellule photoélectrique

★☆☆
Ref. 0119

✓ *Effet photoélectrique*

1) Expérimentalement on constate que l'effet photoélectrique ne se produit qu'à partir d'une fréquence minimale ν_0 du rayonnement incident. On appelle travail d'extraction du métal W_0 l'énergie minimale à fournir pour arracher un électron. Ecrire la relation entre le travail d'extraction de l'électron W_0 et ν_0.
2) Si la fréquence de la lumière utilisée vérifie $\nu > \nu_0$, donner l'expression de l'énergie cinétique d'un l'électron émis en fonction de ν et W_0.

On bombarde une surface métallique, dont le travail d'extraction est de $2{,}2\ eV$, par un laser de longueur d'onde $\lambda = 355\ nm$ de puissance $P = 1\ mW$.

3) Calculer le nombre de photons incidents sur la plaque métallique par seconde.
4) Peut-on observer l'effet photoélectrique ?
5) On suppose qu'un photon donne toujours un électron et que tous les électrons émis par la cathode sont collectés grâce à l'anode chargée positivement placée en regard de la plaque. Calculez l'intensité (en valeur absolue) du courant électrique, appelé « courant de saturation » de la cellule. Vous exprimerez ce courant I_s en fonction de λ, P et des constantes nécessaires.
6) Tracer l'allure du courant de saturation en fonction de la longueur d'onde du rayonnement incident, pour une même puissance.
7) Calculer l'énergie cinétique de chaque électron émis, en eV.
8) On mesure un courant $I_s = 20\ \mu A$. Déterminer le rendement quantique de la cellule photoélectrique, c'est-à-dire le nombre d'électrons émis sur le nombre de photons reçus. On supposera que tous les électrons arrachés participent au courant (ce qui n'est pas le cas en réalité).
9) L'intensité de ce courant étant faible, on l'amplifie en utilisant un photomultiplicateur : la lumière vient provoquer un effet photoélectrique sur la photocathode et les électrons arrachés sont accélérés par des dynodes sur lesquelles ils arrachent à leur tour 3 électrons secondaires. Le photomultiplicateur contient 10 dynodes. Déterminer l'intensité du courant à la sortie du photomultiplicateur.

On donne : $h = 6{,}63\ 10^{-34}$ J.s. ; $e = 1.6.10^{-19}$ C.

Exercice 3 : Microscope électronique

★☆☆
Ref. 0120

✓ *Longueur d'onde de De Broglie*

Par analogie avec l'optique des ondes lumineuses, des chercheurs ont développé une optique électronique. En 1933, le physicien allemand Ernst Ruska construit le premier microscope électronique.

1) Un microscope optique ne peut révéler des détails plus petits que l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière visible. Expliquer pourquoi et donner une valeur numérique typique.
2) Calculer la longueur d'onde de De Broglie pour des électrons accélérés sous une tension de 100 V, et donc ayant acquis une énergie cinétique de 100 eV. En déduire l'avantage majeur du microscope électronique par rapport au microscope optique.
3) Dans certains appareils, les électrons sont accélérés sous une tension de 100 kV et la longueur d'onde obtenue est alors de l'ordre de 1 pm. Pour évaluer cette longueur d'onde, montrer que l'on doit avoir recours aux formules de mécanique relativiste. L'énergie cinétique est alors $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ où γ est le coefficient

relativiste tel que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, v étant la vitesse de l'électron. La quantité de mouvement quant à elle est $p = \gamma m v$. Calculer la longueur d'onde λ des électrons.

Données : $h = 6{,}626.10^{-34}\ J.s$; $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$; $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$.

Image d'une fourmi par un microscope électronique

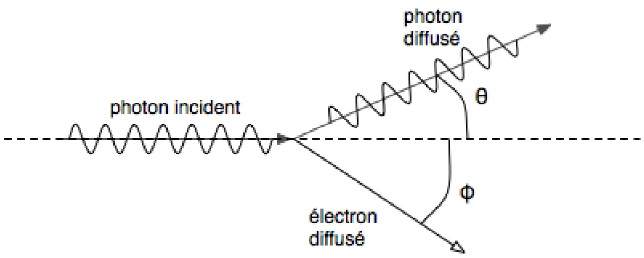
Exercice 4 : Diffusion Compton

★★★
Ref. 0121

- ✓ *Fonction d'onde*
- ✓ *Densité de probabilité*

Arthur H. Compton (1892-1962) découvrit qu'un rayonnement (X ou gamma) incident pouvait être diffusé par la matière (en fait par les électrons) et perdre de l'énergie, c'est-à-dire émerger avec une longueur d'onde plus grande. Pour expliquer cette observation, considérons qu'un photon de fréquence f entre en collision avec un électron au repos de masse m_e, on note (Ox) la direction du photon incident.

Suite à la collision, un photon, dit diffusé, de fréquence f' est alors émis dans une direction qui forme un angle θ avec (Ox) et l'électron acquiert une vitesse et donc une quantité de mouvement $\overrightarrow{p_e}$ qui forment un angle ϕ avec (Ox) (également dit diffusé).



Diffusion Compton: Collision d'un photon avec un électron au repos

1) Exprimer l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon en fonction de sa fréquence.
2) À l'aide de la conservation de l'énergie vue en mécanique classique non relativiste et en supposant l'électron initialement au repos, établir une relation entre les fréquences des photons f et f' et la quantité de mouvement de l'électron diffusé.
3) Lors d'une collision, le vecteur quantité de mouvement se conserve. En déduire deux relations entre f, f', $\|\overrightarrow{p_e}\|$, θ et ϕ.
4) En supposant que $\Delta f = f - f' \ll f$ et en utilisant les équations obtenues précédemment, montrer que l'on a : $f - f' \approx f^2 \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$.

Exercice 5 : Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

★★★
Ref. 0122

- ✓ *Fonction d'onde*
- ✓ *Densité de probabilité*

Pour expliquer que des particules peuvent rester confinées en une zone finie, on considère qu'elles n'ont pas assez d'énergie pour s'échapper. On introduit le **modèle du puits de potentiel infini** :

- À l'extérieur du puits, l'énergie potentielle est infiniment grande ;
- À l'intérieur elle est nulle.

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans $x = 0$ et $x = L$ dans un puits infini. On admet que sa fonction d'onde, solution de l'équation de Schrödinger, est une onde stationnaire de la forme :

$$\psi(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\, e^{i\omega t}.$$

1) La probabilité que la particule soit en $x = 0$ ou en $x = L$ est nulle (énergie potentielle non définie). Vérifier que l'expression de la fonction d'onde est cohérente avec ces conditions aux limites et déterminer les valeurs possibles de λ en fonction de L et d'un entier n positif.
2) La probabilité de détecter la particule sur l'intervalle $[x, x+dx]$ est $dP = |\psi\,(x,t)|^2\ dx$. Ecrire alors la condition de normalisation de cette probabilité pour en déduire A.
3) Tracer la densité de probabilité de détection de la particule $|\psi\,(x,t)|^2$ en fonction de x dans les cas $n = 1$ et $n = 2$.
4) Déterminer la quantité de mouvement de l'électron en fonction de h, L et du nombre entier n.
5) Déterminer l'énergie de la particule en fonction de h, L, n et de la masse m de la particule.
6) Application : Un électron de conduction est confiné dans une couche d'arséniure de gallium (GaAs) de largeur L et entre deux couches d'arséniures d'aluminium et de gallium (AlGaAs). On suppose que le modèle du puits infini décrit correctement son confinement. Déterminer les 3 premiers niveaux énergétiques et calculer leurs valeurs (en eV). AN : masse de l'électron $m = 9{,}1.10^{-31}\ kg$. Largeur $L = 10\ nm$.

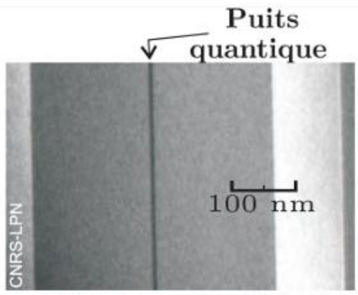


Image obtenue par microscopie électronique en transmission de couches minces $GaAs/GaAlAs$.