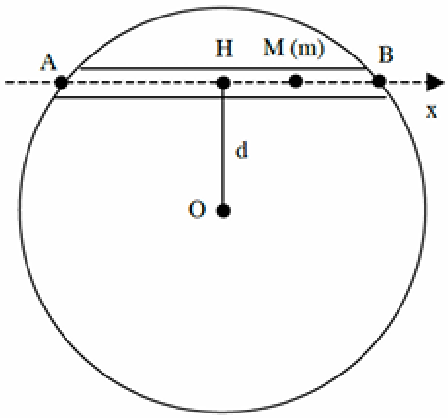
Energétique du point matériel

Exercice 1 : Tunnel terrestre ★★☆

- ✓ *Force de gravitation*
- ✓ *Oscillateur harmonique*

On considère un point M de masse m situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r de son centre O. La Terre est supposée sphérique et de densité constante. On montre que l'attraction terrestre agissant sur ce point se traduit par une force de valeur : $\vec{F} = -mg_0\frac{r}{R}\overrightarrow{u_r}$ où $g_0 = 10\ m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, $R = 6{,}4.10^6\ m$ est le rayon de la Terre, $r = OM$ et $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire radial.

1) Montrer que cette force est une force conservative. Etablir l'expression de l'énergie potentielle associée $E_P(r)$, on prend $E_P(r = 0)$ au centre de la Terre.
2) On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe Ox, ne passant pas par O et traversant la Terre. On note d la distance OH du tunnel au centre de la Terre. Compte tenu de son faible diamètre devant le rayon terrestre, on néglige l'influence de la masse de terre extraite sur les calculs précédents. Un véhicule, assimilé à un point matériel M (masse m), glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre, sans vitesse initiale. Quelle est la vitesse maximale v_m atteinte par le véhicule au cours de son mouvement ? Calculer v_m avec $d = 5{,}0.10^6\ m$.
3) Exprimer $x = HM$ en fonction du temps par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.
4) Quelle est la durée du trajet AB ?
5) Représenter et commenter le profil d'énergie potentielle, graphe de $E_p(x)$. Décrire le mouvement du point M à partir de sa position initiale.



Exercice 2 : Marsupilami ★☆☆

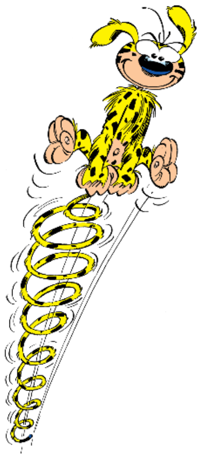
- ✓ *Force de rappel élastique*

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin.

Ses capacités physiques sont remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante : le Marsupilami peut notamment sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.

On note l_0 = 2m la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur minimale du ressort est de l_{min} = 50 cm. On supposera que le Marsupilami pèse 50 kg et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure l_0.

1) Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur h = 10 m par rapport à sa position initiale.
2) Quelle est la vitesse du Marsupilami lorsque sa queue quitte le sol ?

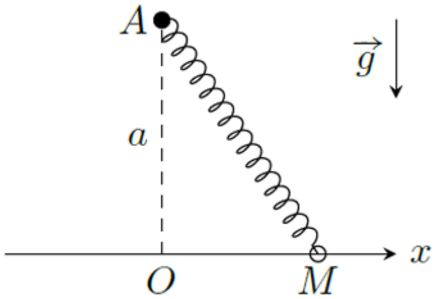


Exercice 3 : Oscillateur de Landau ★★★

- ✓ *Oscillateur mécanique*
- ✓ *Force de rappel élastique*
- ✓ *Stabilité de l'équilibre*

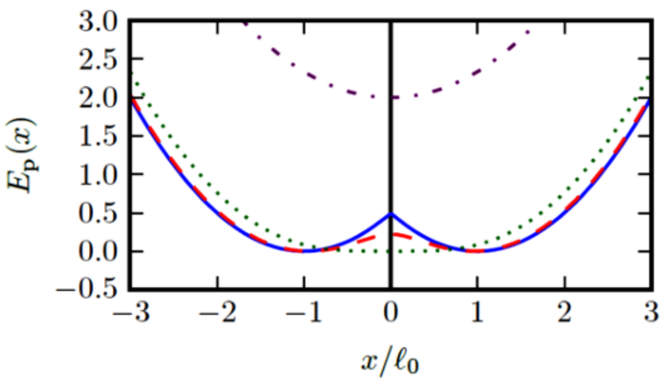
L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox).



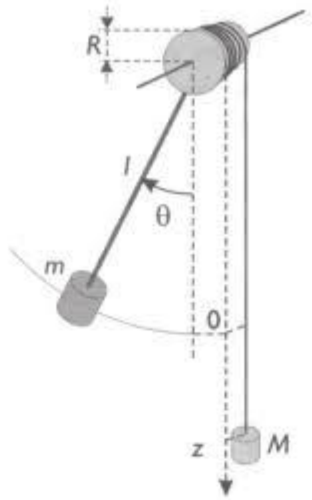
M est accroché à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. L'autre extrémité A du ressort est fixe et se situe à la distance a du point O. L'objet de ce problème est de déterminer une bifurcation, à savoir une modification du nombre de positions d'équilibre, d'un changement de stabilité des positions d'équilibre…

1) Pour une valeur de a quelconque, déterminer l'expression de l'énergie potentielle globale de M en fonction de k, l_0, a et x.
2) Déterminer par le calcul les positions d'équilibre dans les 2 cas $a > l_0$ puis $a < l_0$ et discuter de leur stabilité.
3) Tracer sur un graphique en trait plein les positions d'équilibre stable en fonction de a, et en trait pointillé les positions d'équilibre instable.
4) La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous pour quatre valeurs de a : $a_1 = l_0/10$, $a_2 = l_0/3$, $a_3 = l_0$ et $a_4 = 3\,l_0$. En raisonnant qualitativement sur l'expression de l'énergie potentielle et les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.



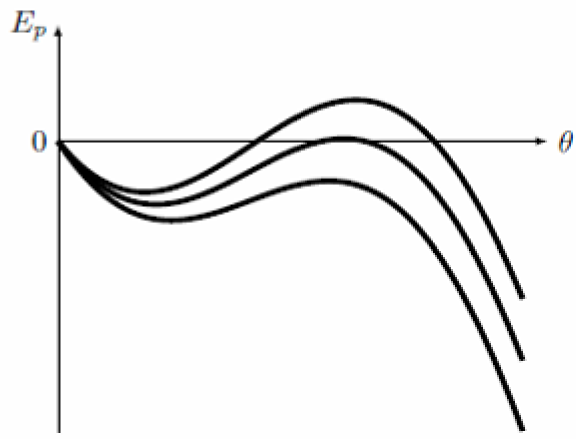
Exercice 4 : Pendule asymétrique ★★★

- ✓ *Oscillateur mécanique*
- ✓ *Stabilité de l'équilibre*



Un objet, de masse m est fixé sur une tige très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre, de rayon R, peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal. Un fil de masse négligeable est enroulé sur le cylindre de façon à ce qu'il ne glisse pas sur le cylindre. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, la masse M se déplace verticalement vers le bas jusqu'à la cote z. On admet que le système constitué par les deux masses m et M est conservatif.

1) Le fil est inextensible, écrire une relation entre R, θ *et* z si les deux masses sont à la même altitude lorsque $\theta = 0$.
2) En déduire l'énergie cinétique E_c du système constitué par les deux masses en fonction de m, M, l *et* $\dot{\theta}$.
3) Montrer que l'énergie potentielle E_p peut s'exprimer en fonction de la seule variable θ.
4) Si la masse M dépasse une certaine valeur M_0, on constate qu'il n'existe plus de position d'équilibre. Exprimer M_0 en fonction de m, l et R.
5) Dans la suite M est inférieure à M_0. Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre θ_{e1} et θ_{e2}. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre.
6) Le système est placé dans la position $\theta = 0$. Les masses sont lachées sans vitesse initiale à la date $t = 0$. La figure 2 ci-dessus représente les trajectoires de phases pour $l = 50\ cm, R = 5\ cm, m = 100\ g$ et pour trois valeurs différentes de M, à savoir $M = 650\ g, 720\ g, 800\ g$. Associer à chaque valeur de M la trajectoire correspondante et préciser son sens de parcours. Justifier à partir du graphe $E_p(\theta)$. Comment choisir M pour obtenir des trajectoires fermées en partant de ces conditions initiales.



Énergie potentielle

7) Etablir l'équation différentielle du 2nd ordre vérifiée par θ . Développer cette équation au voisinage d'une position d'équilibre, dans l'hypothèse de petits mouvements au voisinage de cette position. On pourra poser $\varepsilon = \theta - \theta_e$. Cela confirme-t-il le caractère stable ou instable ? Le cas échéant quelle est la pulsation des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable ?
8) Etablir l'équation du mouvement en supposant que la position angulaire initiale est proche de θ_{e1} puis de θ_{e2}. Justifier à nouveau le caractère stable ou instable de ces positions d'équilibre.

Exercice 5 : Stabilité de l'équilibre ★★★

✓ *Stabilité de l'équilibre*

Un point est mobile sans frottement sur un axe. Son énergie potentielle vaut : $E_p = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b\right)^2$, (k, a, b sont des constantes positives).

1) Déterminer l'expression de la force conservative $F(x)$.
2) Déterminer les positions d'équilibre selon que $a > b$ ou $b > a$.
3) Etudier dans chaque cas la stabilité de ces positions d'équilibre.
4) Etudier le cas particulier $a = b$.