

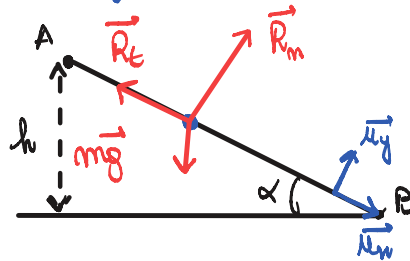
Chapitre 13

Exercice 1:

Système : {cable} Ref : terrestre supposé galiléen

Bdf : • poids

• réaction du support $\vec{R}_m + \vec{R}_t$



On applique le TEC entre A et B:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \underbrace{\int_{A \rightarrow B} (m \vec{g})}_{m g h} + \underbrace{\int_{A \rightarrow B} (\vec{R}_m)}_{0 \text{ car } \perp \vec{u}} + \underbrace{\int_{A \rightarrow B} (\vec{R}_t)}_{\vec{R}_t \cdot \vec{AB} \text{ car } \vec{R}_t = -\mu m g \cos \alpha \vec{u}_n = -C \vec{u}_n}$$

$\|\vec{R}_t\| = \mu \|\vec{R}_m\|$
PFD selon $\vec{u}_y \Rightarrow \|\vec{R}_m\| = m g \cos \alpha$

$$\frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = m g h - \mu m g \cos \alpha \cdot AB \quad \text{or } AB = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2) = g h - \mu g h \frac{1}{\tan \alpha} \quad \tan \alpha = \frac{\mu g h}{g h - \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2)} \quad \alpha = 22^\circ$$

Exercice 2:

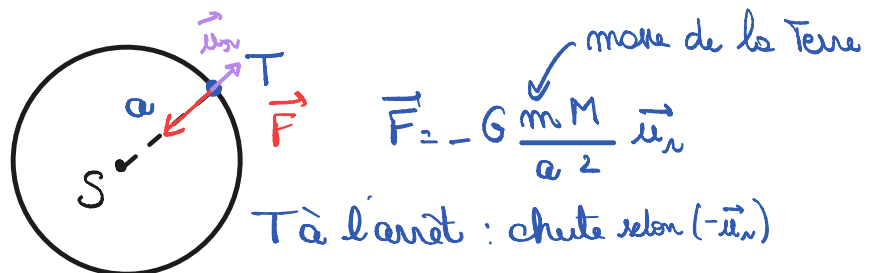
1) Système : {Terre} Ref : héliocentrique supposé galiléen

Bdf : force de gravitation

conservative donc $E_m = Cte$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{G m M}{r} = Cte$$

À $t=0$ $v=0$ et $r=a \rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{G m M}{r} = -\frac{G m M}{a}$



$$\vec{F} = -G \frac{m M}{a^2} \vec{u}_n$$

T à l'arrêt : chute selon $(-\vec{u}_n)$

$$2) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = 2GM \frac{a-r}{a r}$$

$$\frac{dr}{dt} = - \sqrt{\frac{2GM(a-r)}{a r}}$$

car $\frac{dr}{dt} < 0$

On intègre entre $r(0) = a$ et $r(\bar{t}) = 0$

$$\underbrace{- \int_a^0 \sqrt{\frac{a r}{a-r}} dr}_{\sqrt{a} I} = \underbrace{\int_{\bar{t}}^0 \sqrt{2GM} dt}_0 \rightarrow \bar{t} = \frac{\sqrt{a} I}{\sqrt{2GM}}$$

$$3) \bar{t} = \sqrt{\frac{a}{2GM}} \times \frac{\pi a}{2}$$

PFD selon $\vec{u}_r$

Vitesse sur orbite : $m \frac{v_o^2}{a} = G \frac{mM}{a^2} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \frac{2\pi a}{\bar{t}}$

$$\bar{t} = \frac{T_o}{2\pi a} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi a}{2} \quad \bar{t} = \frac{T_o}{4\sqrt{2}} \approx 65 \text{ j}$$

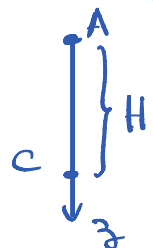
Exercice 3 :

Système : {sauteur} Ref : terrestre supposé galiléen

For : . poids

. force de rappel élastique dès que $z \geq 20 \text{ m}$

forces conservatives $\Rightarrow E_m = Cte$



On applique le TEM entre A et C :

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - m g z_A + Cte = \frac{1}{2} m v_C^2 - m g z_C + Cte + \frac{1}{2} k (z_C - l)^2$$

$$z_C = H \quad \frac{1}{2} k (H - l)^2 - m g H = 0$$

$$\frac{1}{2} k H^2 - (m g + k l) H + \frac{1}{2} k l^2 = 0$$

$$\Delta = (m g + k l)^2 - 4 \times \frac{k^2 H^2 l^2}{4} = (m g + k l)^2 - k^2 l^2 H^2 > 0 \quad \underline{\text{2 solutions réelles}}$$

$$H_1 = 42 \text{ m}$$

$$H_2 = 9,6 \text{ m}$$

$$H > 20 \text{ m} \Rightarrow H = 42 \text{ m}$$

Exercice 4:

Système: $\{e^-\}$

Ref: terrestre supposé galiléen

$$E_m = \text{cte} \text{ par hypothèse} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{eV_0}{2d^2} z^2 \right) = 0$$

$$m \ddot{z} + \frac{eV_0}{d^2} z = 0 \rightarrow \ddot{z} + \frac{eV_0}{md^2} z = 0 \quad \text{OHNA}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}$$

$$\text{AN: } f = 25 \text{ MHz}$$

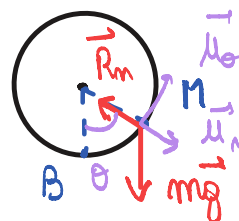
Exercice 5:

Système: $\{\text{voiture}\}$

Ref: terrestre supposé galiléen

BdF: . poids

. réaction normale du support



1) TEC entre A et B:

$$(\vec{R}_m \perp \vec{v}: W=0)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = m g h$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Rq: On peut aussi utiliser $E_m = \text{cte}$ (seul le poids, conservatif, travaille)

2) TEC entre B et M: $\frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -m g \frac{a(1-\cos\theta)}{h'}$

$$v_n = \sqrt{2g(h - a(1-\cos\theta))}$$



3) $\vec{R}_m$ ne travaillant pas, on utilise le PFD.

Selon $\vec{u}_n$: $-m \frac{v_n^2}{a} = -\|\vec{R}_m\| + mg \cos \theta \rightarrow \|\vec{R}_m\| = 2mg \left(\frac{h}{a} - 1 + \cos \theta \right) + mg \cos \theta$

$$\|\vec{R}_m\| = 2mg \frac{h}{a} - 2mg + 3mg \cos \theta$$

4) $\|\vec{R}_m\|$ est minimale pour $\cos \theta$ minimal donc pour $\theta = \pi$.

5) La voiture ne décolla pas des rails si $\|\vec{R}_m\| > 0 \forall \theta$ et donc si $\|\vec{R}_m\|(\theta = \pi) > 0$.

$$2mg \frac{h}{a} - 5mg > 0 \quad h > \frac{5a}{2} = 11,75 \text{ m}$$

$$6) \|\vec{R}_m\|(\theta = \pi) > \frac{mg}{4} \quad 2mg \frac{h}{a} - 5mg > \frac{mg}{4} \quad h > 12,34 \text{ m}$$

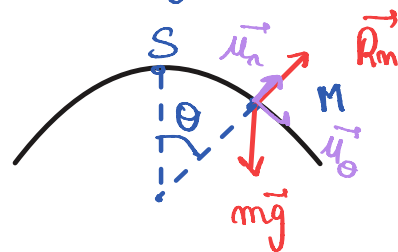
Exercice 6 :

Système : { esquimaux }

Ref. : terre (réf. galiléenne)

BolF : - poids

- réaction normale du support



Système
Conservatif

1) TEM entre S et M : $E_m = Cte$

$$\frac{1}{2} m v_S^2 + mgR + Cte = \frac{1}{2} m v_n^2 + mgR \cos \theta + Cte$$

$$v_n = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

2) Avec le PFD : $-m \frac{v_n^2}{R} = \|\vec{R}_m\| - mg \cos \theta$

$$\|\vec{R}_m\| = mg \cos \theta - 2mg(1 - \cos \theta) = 3mg \cos \theta - 2mg$$

3) Rupture du contact : $\|\vec{R}_m\| = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \quad \theta = 48^\circ$

(On retrouve le résultat du TD 12)

Exercice 7 :

1) $h = \alpha \times 2\pi m \rightarrow \alpha = \frac{h}{2\pi m} = 0,28 \text{ m} \cdot \text{rad}^{-1}$

2) Système : {baigneur} Réf : terrestre supposé galiléen

Bdf : - poids : force conservative

- réaction normale du support : $\perp \vec{v}$ donc ne travaille pas

Système conservatif.

$E_m = Cte$ entre O et A (bas du toboggan) : $\frac{1}{2} m v_O^2 - mg z_O + Cte = \frac{1}{2} m v_A^2 - mg z_A + Cte$
 $\Rightarrow v_A = \sqrt{2gh} = 8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3) On cherche t tel que $\theta(t) = 2\pi m$ il faut chercher 1 équation différentielle vérifiée par θ : PFD ou TPC comme $\vec{R}_m$ est inconnue et qu'elle ne travaille pas il est préférable d'utiliser le TPC (ou $\frac{dE_m}{dt} = 0$)

$$\frac{dE_c}{dt} = P(m\vec{g}) \quad \left(\text{ou } \frac{dE_m}{dt} = 0 \right)$$

• $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $\vec{OM} = R \vec{u}_r + z \vec{u}_z = R \vec{u}_r + d\theta \vec{u}_\theta$
 $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta + d\dot{\theta} \vec{u}_z$ $\|\vec{v}\| = ((R\dot{\theta})^2 + (d\dot{\theta})^2)^{1/2}$
 $\|\vec{v}\|^2 = (R^2 + d^2) \dot{\theta}^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} m (R^2 + d^2) \dot{\theta}^2$

• $P(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mg d \dot{\theta}$

TPC $\Rightarrow m(R^2 + d^2) \ddot{\theta} \dot{\theta} = mg d \dot{\theta}$

$\ddot{\theta} = \frac{gd}{R^2 + d^2} = Cte$ donc $\dot{\theta}(t) = \frac{gd}{R^2 + d^2} t$ ($\dot{\theta}(0) = 0$ donc $Cte = 0$)

$\theta(t) = \frac{gd}{R^2 + d^2} \frac{t^2}{2}$ ($\theta(0) = 0$ donc $Cte = 0$)

$t_f = t_m + \left(\frac{2\pi m (R^2 + d^2)}{gd} \right)^{1/2}$

AN : $t_f = 11,6 \text{ s}$

Exercice 8 :

1) $V(r) = V_0 (1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$ $\beta(r-r_0)$ sans dimension donc :
 $[\beta] = L^{-1}$

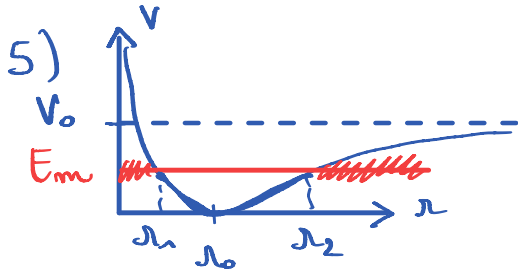
2). lorsque $r \rightarrow \infty$ $V(r) \rightarrow V_0 \approx 8 \text{ eV}$ profondeur des puits

• lorsque $r = r_0$ $V(r) = 0$ minimum $r_0 \approx 120 \text{ pm}$

r_0 : position d'équilibre stable

3) • $r < r_0$ $V(r)$ décroissante : $F(r) > 0$ interaction répulsive

4) • $r > r_0$ $V(r)$ croissante : $F(r) < 0$ interaction attractive



interdit car E_m doit être $> V(r)$

$r \in [r_1, r_2] \rightarrow$ état lié
 $v(r_1) = v(r_2) = 0$
 oscillations autour de r_0

6) $V(r) = V_0 (1 - \exp(-\beta(r-r_0)))^2$ on pose $x = \beta(r-r_0)$

$V(r) = V_0 (1 - 2\exp(-x) + \exp(-2x))$

DL : $|x| \ll 1$ $\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$V(r) \approx V_0 (1 - 2 + 2x - x^2 + 1 - 2x + \frac{4x^2}{2}) \approx V_0 x^2$

$V(r) \approx V_0 \beta^2 (r-r_0)^2$

$V(r)$ de la forme $\frac{1}{2} k (r-r_0)^2$ si on pose $k = 2V_0 \beta^2$

7) Système conservatif $\Rightarrow E_m = Cte$

$\frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (r-r_0)^2 = Cte$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mu \dot{x} \ddot{x} + k (r-r_0) \dot{x} = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{\mu} x = \frac{k}{\mu} r_0$

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2V B^2}{\mu_0 M_c M_0} (M_c + M_0) \times N_c \right)^{1/2} = 5,52 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

Exercice 9:

$$1) \vec{OP} = (a(1+\cos\theta)\vec{e}_x + a\sin\theta\vec{e}_y)$$

$$l = a((1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta)^{1/2} = a(2+2\cos\theta)^{1/2}$$

$$2) E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + Cte$$

$$E_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k(a\sqrt{2}(1+\cos\theta) - l_0)^2$$

$$3) a) E_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k(2a^2(1+\cos\theta) + l_0^2 - 2\sqrt{2}a(1+\cos\theta)^{1/2}l_0) + Cte$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \quad l_0 = \sqrt{3} \frac{mg}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$E_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2} \frac{2mg}{k} \left(2a^2 + 2a^2\cos\theta + \frac{3}{4}a^2 - 2\sqrt{2}a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}a \right) + Cte$$

$$E_p = -mga\cos\theta + 2mga + 2mga\cos\theta + \frac{3}{4}mga - mg2\sqrt{3}a\cos\frac{\theta}{2} + Cte$$

→ constante

$$E_p = mga(\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}) + \text{constante}$$

$$b) \frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\sin\theta + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \quad \hookrightarrow -\sin\theta + \sin\theta \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} = 0$$

$$\sin\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} - 1 \right) = 0$$

$$\text{Or } [0, \frac{\pi}{2}] : \theta = 0 \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$4) \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

pour $\theta = 0$: $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,13 < 0$ instable

pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,25 > 0$ stable