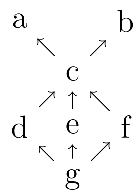
TD7: Induction et ordres

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Exercice 1.

Diagrammes de Hasse

On considère l'ensemble $X = \{$a, b, c, d, e, f, g$\}$.
On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des couples $(x, y) \in X^2$ tels qu'une flèche va de x vers y sur le diagramme ci-contre, i.e. $\mathcal{R} = \{(g, d), (g, e), (g, f), (d, c), (e, c), (f, c), (c, a), (c, b)\}$.



Q1. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? anti-symétrique ?

Q2. Donner explicitement la relation $\mathcal{R}^2$

On note $\leq = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}^n$ la clôture transitive et réflexive de $\mathcal{R}$.

Q3. Décrire ce que représente $\leq$ par rapport au diagramme, puis justifier que $\leq$ est un ordre sur X.

Q4. On note $A = \{c, d, e\} \subseteq X$. Étudier les éléments minimaux / maximaux de A, ses plus grands / plus petits éléments, ses majorants / minorants, et ses bornes.

Pour $(X, \leq_X)$ un ordre fini quelconque, on appelle ***diagramme de Hasse*** de $\leq_X$ la représentation visuelle suivante de X :

- Chaque élément est représenté par un point
- Si $x \leq_X y$ alors x est placé plus bas que y dans le diagramme
- Chaque couple $(x, y) \in X^2$ tel que $x <_X y$ et tel qu'il n'existe aucun $z \in X$ avec $x <_X z <_X y$ est relié par une flèche.

Le diagramme de Hasse est donc une manière compacte de représenter un ordre, en ne représentant que les relations clés de l'ordre, et pas celles qui peuvent être déduites par transitivité. Par exemple, le diagramme de Hasse de l'ordre $(X, \leq)$ défini avant la Q3 est précisément le diagramme du début de l'exercice.

Q5. Dessiner le diagramme de Hasse des ordres suivants :

a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ muni de l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$
b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ divise $60\}$ muni de la relation de divisibilité
c) $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ muni de l'inclusion

Q6. Donner tous les diagrammes de Hasse à 2 éléments (il y en a 2), à 3 éléments (il y en a 5), et à 4 éléments (il y en a 16).

Q7. Choisir 5 diagrammes de Hasse à 4 éléments et pour chacun, trouver une partie de $(\mathbb{N}, |)$ dont c'est le diagramme de Hasse.

Il y a 2045 diagrammes de Hasse à 7 éléments : arxiv.org/pdf/1710.10343.pdf

Exercice 2. *Isomorphismes*

On appelle ***Isomorphisme d'ordres*** toute bijection croissante entre deux ensembles ordonnés, dont la réciproque est aussi croissante. On dit que deux ensembles ordonnés sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre les deux.

Q1. (*) On note $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, muni de l'inclusion, et $Y = \{0,1\}^3$ muni de l'ordre produit. Donner un isomorphisme entre X et Y.

Q2. (*) On note $X = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$ muni de l'inclusion, et $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 30\}$ muni de la relation de divisibilité. Donner un isomorphisme entre X et Y.

Q3. Trouver une bijection croissante entre deux ensembles ordonnés mais dont la réciproque n'est **pas** croissante.

Exercice 3. *Théorème de Knaster-Tarski*

Définition 1. Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que c'est un ***treillis complet*** s'il est non-vide, et que toute partie $F \subseteq X$ non vide admet une borne supérieure, notée $\bigvee F$, et une borne inférieure, notée $\bigwedge F$.

Q1. Montrer que tout treillis complet admet un plus petit et un plus grand élément. On les notera respectivement $\perp$ (prononcé "bottom") et $\top$ (prononcé "top").

Q2. (*) Montrer que les ensembles suivants sont des treillis complets :

a) $\{0,1,2,3\}$ muni de l'ordre naturel des entiers

b) $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ pour E ensemble quelconque

c) $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité.

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Knaster-Tarski)**.** Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \to X$ une fonction croissante. Alors, l'ensemble des points fixes de f est un treillis complet, et en particulier il admet un plus petit élément.

On considère donc un treillis complet $(X, \leq)$, et $f : X \to X$ une fonction croissante.

Q3. On considère l'ensemble $P = \{x \in X \mid f(x) \leq x\}$, que l'on appelle ensemble des ***points pré-fixes*** de f. Montrer que P est non-vide.

Q4. Montrer que $f(\bigwedge P)$ est un minorant de P.

Q5. Montrer que $\bigwedge P$ est un point fixe de f, et que c'est le plus petit.

Q6. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un treillis complet.

Exercice 4. *Composition de relations*

Q1. Rappeler la définition de la composition sur les relations binaires.

Q2. Montrer que la composition est associative.

Soit X un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur X est **fonctionnelle** si pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in X$ tel que $x \mathcal{R} y$.

Q3. Montrer que la composition de deux relations fonctionnelles est fonctionnelle.

Q4. (*) Exhiber un élément neutre pour la composition des relations.

Exercice 5. *Unions ordonnées*

Q1. Montrer que tout ordre fini est bien fondé

Pour X, Y deux ensembles quelconques, on appelle **union disjointe** de X et Y l'ensemble $X \coprod Y = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$.

Q2. Décrire explicitement l'ensemble $\{a, b\} \coprod \{b, c\}$.

Q3. On considère $(X, \leq_X)$ et $(Y, \leq_Y)$ deux ordres bien fondés, et $Z = X \coprod Y$ l'union disjointe de X et Y. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur Z par :

$$\begin{array}{l} \forall x \in X, \forall y \in Y, (0, x)\mathcal{R}(1, y) \\ \forall x, x' \in X, (0, x)\mathcal{R}(0, x') \Leftrightarrow x \leq_X x' \\ \forall y, y' \in Y, (1, y)\mathcal{R}(1, y') \Leftrightarrow y \leq_Y y' \end{array}$$

Montrer que $(Z, \mathcal{R})$ est un ordre bien fondé.

Cette propriété permet de définir un ordre bien fondé sur les types somme non récursifs, et correspond d'ailleurs à l'ordre utilisé par OCaml par défaut.

Exercice 6. *Mi casa es tu casa*

On considère la fonction d'Ackermann, définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & \text{si } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1. Montrer que cette fonction termine.

Q2. Montrer que pour $m, n \in \mathbb{N}, A(m, n) \geq m + n + 1$

Q3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, A(3, n) \geq 2^n$

Cette fonction grandit extrêmement vite : $A(3, 2)$ vaut 29 mais $A(4, 2)$ vaut $2^{65536} - 3$. On peut montrer qu'il est impossible de la calculer uniquement avec des boucles for et des opérations arithmétiques.

Exercice 7. *Étude de fonction*

Q1. Définir une fonction **concat** permettant de concaténer deux listes l_1, l_2, ainsi qu'une fonction **len** permettant de calculer la taille d'une liste.

Q2. Justifier que les deux fonctions terminent, et donner leurs complexités.

Q3. Montrer formellement que pour l_1, l_2 deux listes, on a :

$$\mathbf{len}(\mathbf{concat}(l_1, l_2)) = \mathbf{len}(l_1) + \mathbf{len}(l_2)$$

Exercice 8. *Ordre méthodique*

Soit Σ un alphabet fini, muni d'un ordre $\leq$

Q1. Rappeler l'ordre lexicographique sur Σ^*. On le notera $\leq_L$.

Q2. On suppose que Σ contient au moins deux éléments comparables. Montrer que l'ordre lexicographique n'est pas bien fondé.

Q3. On définit l'ordre ***méthodique*** $\leq_M$ sur Σ^* par :

$$\forall u, v \in \Sigma^*, u \leq_M \Leftrightarrow |u| < |v| \text{ ou } (|u| = |v| \text{ et } u \leq_L v)$$

Montrer que c'est bien un ordre, et qu'il est bien fondé.

Exercice 9. *Isomorphismes 2*

Q1. Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer que X est isomorphe à un sous-ensemble de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Q2. Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné dénombrable. Montrer que X est isomorphe à un sous-ensemble de $(\mathbb{N}, |)$.

Indications

— Exercice 2 Questions 1 et 2 : Tracez les diagrammes de Hasse des ensembles pour vous aider à identifier leurs similarités.

— Exercice 3 Question 2 : commencez par déterminer le plus grand et le plus petit élément de chaque ensemble pour vous familiariser avec sa structure.

— Exercice 4 Question 4 : pensez à la composition de fonctions.