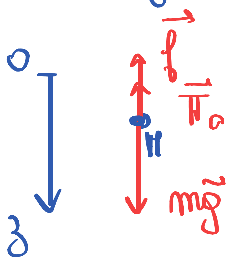
Entraînement Dynamique

Viscosimètre à bille

Système : {bille}   Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : poids
poussée d'Archimède
frottements fluides



1) $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_z$ $\vec{v} = v\vec{u}_z$ $m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ $\vec{\Pi}_a = -\rho_f V\vec{g}$ $(V = \frac{4}{3}\pi r^3)$ $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

PFD selon Oz : $m\frac{dv}{dt} = mg - \rho_f Vg - \alpha v \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g - \rho_f\frac{V}{m}g$

$m = \rho V$ $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{\rho V}v = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$ on posera $\tau = \frac{\rho V}{\alpha}$

2) $v(t) = A\exp(-t/\tau) + v_p$ $v_p = \frac{\rho Vg}{\alpha}\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$ $v(0) = 0 \Rightarrow A = -v_p$

$$v(t) = v_p\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

3) $v_{lim} = v$ quand $t \to \infty$ $v_{lim} = v_p$ $v_{lim} = \frac{\rho Vg}{\alpha}\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$

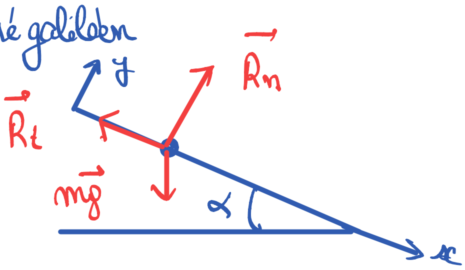
$\frac{4\cancel{\pi}r^{\cancel{3}\,2}}{3}$ $6\cancel{\pi}\eta\cancel{r}$

$$v_{lim} = \frac{2\rho r^2 V}{9\eta}\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$$

4) On mesure v_{lim} pour en déduire η.

Mécanique des avalanches

Système : {neige}   Réf : terrestre supposé galiléen



BdF : poids $m\vec{g}$
réaction du support $\vec{R} = \vec{R_n} + \vec{R_t}$

1) Equilibre $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$

Dans $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$:

$$\begin{pmatrix}\|\vec{R_t}\| \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 \\ \|\vec{R_n}\|\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

Absence de glissement $\underbrace{\|\vec{R_t}\|}_{= mg\sin\alpha} \leq \mu_s \underbrace{\|\vec{R_n}\|}_{= mg\cos\alpha} \iff \sin\alpha \leq \mu_s\cos\alpha \iff \tan\alpha \leq \mu_s$

$\alpha \leq \alpha_c$ tel que $\alpha_c = \arctan \mu_s$

2) $\vec{v} = v\,\vec{u_x}$ PFD selon $\vec{u_x}$: $m\dfrac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - \|\vec{R_t}\|$ or $\|\vec{R_t}\| = \mu_D \|\vec{R_n}\| = \mu_D\, mg\cos\alpha$

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha)$$

3) $v(t) = v_0 + g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha)\,t$

4) L'énergie cinétique est d'autant plus grande que v est grande.

$\alpha = \alpha_c$ on calcule $\sin\alpha_c - \mu_D\cos\alpha_c$:
- neige fraîche $\alpha_c = 84{,}3° \Rightarrow 0{,}97$
- gobelets $\alpha_c = 50{,}2° \Rightarrow 0{,}32$
- grains ronds $\alpha_c = 50{,}2° \Rightarrow 0{,}51$

En théorie : + violent avec la neige fraîche mais généralement $\alpha < 84{,}3°$!

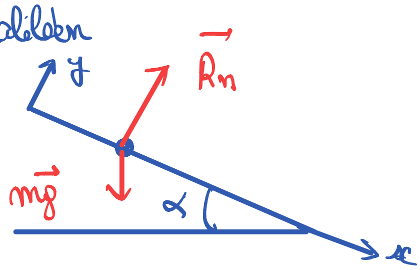
En pratique le risque est plus élevé avec la neige à grains ronds.

5) $\alpha < \alpha_c$ le mouvement est ralenti puis stoppé si $\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha < 0$

$\tan\alpha < \mu_D$

Descente en luge

Système : {luge} Réf : terrestre supposé galiléen



BdF : poids $m\vec{g}$
réaction du support $\vec{R} = \vec{R_n}$

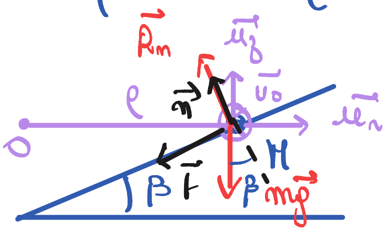
1) $\vec{a} = a\,\vec{u_x}$ on projette le PFD selon O_x $m\,a = mg\sin\alpha$ $a = g\sin\alpha$

2) $\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha$ $v(t) = g\sin\alpha\, t + v_a$ $t_a = 25\,s$

3) $x(t) = g\sin\alpha\,\frac{t^2}{2} + v_0 t$ $x(t_a) = 437\,m$

4) $\vec{OM} = \rho\,\vec{u_r}$ $\vec{v} = \rho\dot\theta\,\vec{u_\theta}$ $V = \rho\dot\theta = Cte$ $\vec{a} = -\rho\dot\theta\vec{u_r} = -\frac{V^2}{\rho}\vec{u_r}$ centripète car mouvement circulaire uniforme.

5) et 6)



$\vec{R_n} = R_n\,\vec{n}$ $R_n > 0$ (si contact)

$\vec{R_t} = R_t\,\vec{t}$ le signe de R_t dépend du sens du dérapage

extérieur : $R_t > 0$ intérieur : $R_t < 0$

Dans $(\vec{n}, \vec{t})$:

$m\frac{V^2}{\rho}\sin\beta =$	R_n +	$-mg\cos\beta$
$m\frac{V^2}{\rho}\cos\beta$	R_t	$mg\sin\beta$

$R_n = m\left(\frac{V^2}{\rho}\sin\beta + g\cos\beta\right)$

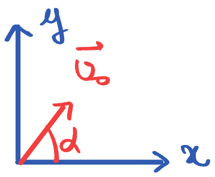
$R_t = m\left(\frac{V^2}{\rho}\cos\beta - g\sin\beta\right)$

7) $|R_t| \leq f\,R_n$ si $R_t > 0$ $R_t \leq f\,R_n \iff \frac{V^2}{\rho}(\cos\beta - f\sin\beta) \leq \underbrace{g(f\cos\beta + \sin\beta)}_{0}$

8) Cette inégalité est toujours vérifiée si $\cos\beta - f\sin\beta < 0 \iff \tan\beta > \frac{1}{f}$ $\beta > 68°$

Parabole de sûreté

1) Cf cours...



CI : $x(0)=0 \quad y(0)$

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \, t$$

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \, t$$

$$y(x) = -g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha \, x$$

2) Un point de coordonnées (X,Y) est atteint si $-g\dfrac{X^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha \, X = Y$ admet au moins une solution.

On fixe X, Y et v_0. α est la variable. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

L'équation peut s'écrire :

$$-\frac{gX^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha + X\tan\alpha - \left(Y + \frac{gX^2}{2v_0^2}\right) = 0$$

équation du 2nd degré où l'inconnue est $\tan\alpha$.

Cette équation admet au moins 1 solution si $\Delta \geq 0$.

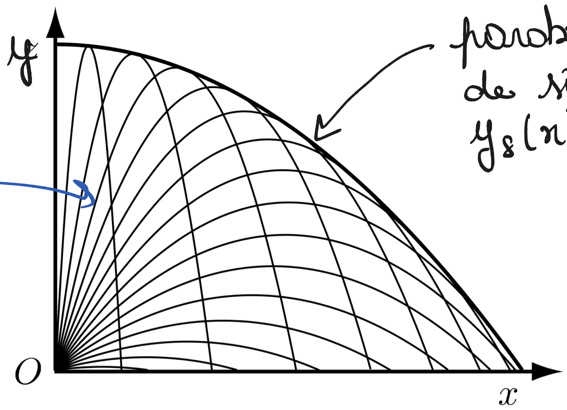
$$X^2 - 4\frac{gX^2}{2v_0^2}Y - 4\frac{g^2X^4}{4v_0^4} \geq 0 \qquad \frac{2g}{v_0^2}Y \leq 1 - \frac{g^2X^2}{v_0^2} \qquad (X \neq 0)$$

$$Y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}X^2$$

Les points (X,Y) sont à l'intérieur d'1 parabole dite de sécurité qui enveloppe toutes les trajectoires possibles pour 1 valeur de v_0 fixée.

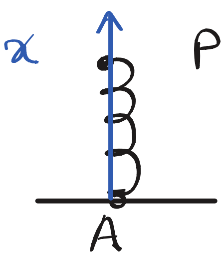
$$y_s(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

trajectoires pour des $\alpha \neq$ mais même v_0



parabole de sûreté $y_s(x)$

Ressort qui décolle



1) <u>Système</u> : {masse m} <u>Réf</u> : terrestre supposé galiléen

<u>BdF</u> : $m\vec{g}$, $\vec{F_e} = -k(l - l_0)\vec{u_x}$

A l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ selon Ox : $0 = -mg - k(l_{eq} - l_0)$

$$l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

2) $x = l - l_{eq} \rightarrow l = x + l_{eq}$

$m\ddot{x} = -mg - k\left(x + l_0 - \frac{mg}{k} - l_0\right) \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

3) $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\quad x(0) = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\dot{x}(0) = v_0 \quad A = -\frac{v_0}{\omega_0}$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

4) <u>Système</u> : {masse M} <u>Réf</u> : terrestre supposé galiléen

<u>BdF</u> : $M\vec{g}$, $\vec{F_e} = +k(l - l_0)\vec{u_x}$, $\vec{R_n}$

↑ pour M l'allongement se fait selon $(-\vec{u_x})$

5) Contact maintenu $\Rightarrow \ddot{x}_M = 0$ et $\vec{R_n} = R_n \vec{u_x}$ existe

Selon $\vec{u_x}$: $0 = -Mg + k\left(x + l_0 - \frac{mg}{k} - l_0\right) + R_n$

$R_n = (M+m)g - kx(t)$ $\quad R_n = (M+m)g - \frac{kv_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

6) A décolle si R_n s'annule. R_n oscille entre $(M+m)g + k\frac{v_0}{\omega_0}$ et $(M+m)g - k\frac{v_0}{\omega_0}$

↳ Pour cela il faut que $(M+m)g - k\frac{v_0}{\omega_0} < 0$ $\quad v_0 > \frac{(M+m)g}{\sqrt{km}}$