Entraînement énergétique

Tunnel terrestre

1) $\vec{F}$ est conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi ou s'il existe une fonction E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$

En coordonnées sphériques :
$$\begin{vmatrix} -m g_0 \dfrac{r}{R} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial E_p}{\partial r} \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta} \\ -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial E_p}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

E_p ne dépend pas de φ et θ
↳ $E_p(r)$

$$\frac{dE_p}{dr} = m g_0 \frac{r}{R} \qquad E_p(r) = m g_0 \frac{r^2}{2R}$$

($C_{te} = 0$ car on choisit $E_p(0) = 0$)

2) Système conservatif $\Rightarrow E_m = C_{te}$ $E_c + E_p = C_{te}$ E_p minimale en H donc E_c maximal en H.

$$E_m(H) = E_m(A) \qquad \frac{1}{2}\cancel{m} v_H^2 + \cancel{m} g_0 \frac{d^2}{2R} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{0} + \cancel{m} g_0 \frac{R}{2}$$

$$v_H = v_m = \sqrt{g_0 R\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)}$$

3) $E_m = C_{te}$ $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m g_0 \frac{r^2}{2R} = C_{te}$ $r^2 = d^2 + x^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \qquad \cancel{m}\,\cancel{\dot{x}}\,\ddot{x} + \cancel{m} g_0 \frac{x\cancel{\dot{x}}}{R} = 0 \qquad \ddot{x} + \frac{g_0}{R} x = 0 \quad \text{OHNA} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

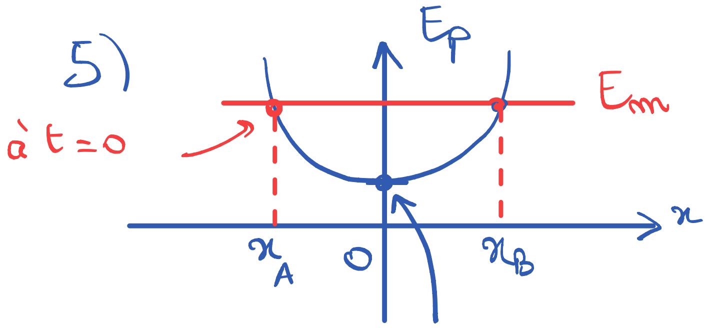
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(0) &= 0 \quad \varphi = 0 \\ x(0) &= -(R^2 - d^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad x(t) = -(R^2 - d^2)\cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = (R^2 - d^2)^{1/2}\omega_0 \sin(\omega_0 t) \qquad v_m = (R^2 - d^2)\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}(R^2 - d^2)}$$

$\hat{=}$ au 2)

4) $\Delta t_{AB} = \dfrac{T}{2} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \times \dfrac{1}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}$

5)



$Ep(H) = mg_0 \dfrac{d^2}{2R}$

le train oscille entre A et B autour de H à la pulsat° ω_0

H : position d'équilibre stable

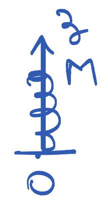
Nouvupiloni

Système : {Nouvupiloni}

Réf : terrestre supposé galiléen

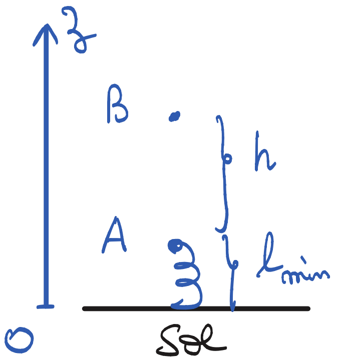
Bdf : . poids

. $\vec{F_e} = -k(l - l_0)\vec{u_z}$



forces conservatives

1)



TEM entre A et B : $\Delta E_m = 0$

$E_m(A) = E_m(B)$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{=0} + \underbrace{mg\,l_{min} + \cancel{Cte}}_{E_{pp}(A)} + \underbrace{\frac{1}{2}k(l_{min} - l_0)^2}_{E_{pe}(A)} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{=0} + mg(h + l_{min}) + \cancel{Cte}$$

en B le ressort n'agit plus ($l = l_0$)

$$\frac{1}{2}k(l_{min} - l_0)^2 = mgh \qquad k = \frac{2mgh}{(l_{min} - l_0)^2} = 4{,}4\ kN.m^{-1}$$

2) C : point où le Nouvupiloni quitte le sol ($l = l_0$), $E_{pe}(C) = 0$

$$E_m(B) = E_m(C) \Rightarrow mg(h + l_{min}) = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgl_0$$

$$v_c = \sqrt{2g(h + l_{min} - l_0)} = 12{,}6\ m.s^{-1}$$

Oscillateur de Landau

1) $E_{p_e} = \frac{1}{2} k (AM - l_0)^2$ $\quad AM^2 = a^2 + x^2$ $\quad E_{pp} = $ Cte on la prend $= 0$

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{a^2+x^2} - l_0\right)^2$$

2) $\frac{dE_{p_e}}{dx} = 0 \iff \frac{d}{dx}\left(a^2 + x^2 - 2l_0\sqrt{a^2+x^2} + l_0^2\right) = 0$

$$\iff 2x - l_0 \frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0$$

$\iff x = 0$ ou $l_0 = \sqrt{a^2+x^2} \iff x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ si $l_0 > a$

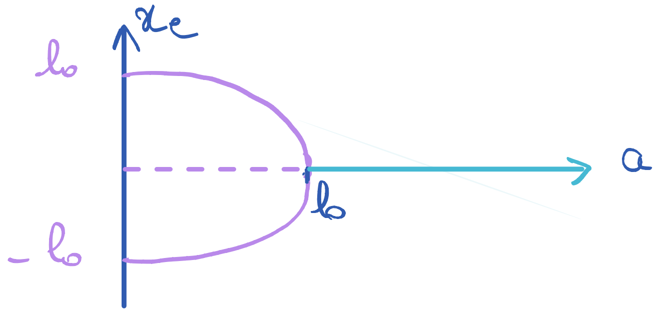
- $a > l_0$: $x_{e_1} = 0$ $\quad$ 1 position d'équilibre
- $l_0 > a$: $x_{e_2} = 0$ et $x_{e_{3/4}} = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ $\quad$ 3 positions d'équilibre

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{1}{2} k \left(2 - \frac{2l_0}{\sqrt{a^2+x^2}} + l_0\, 2x^2 (a^2+x^2)^{-3/2}\right)$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right) \begin{cases} < 0 \text{ si } l_0 > a & x_{e_2} \text{ Instable} \\ > 0 \text{ si } l_0 < a & x_{e_1} \text{ Stable} \end{cases}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{e_{3/4}}) = k\left(1 - \frac{l_0}{l_0} + l_0\, x_{e_{3/4}}^2\, l_0^{-3}\right) > 0$$ x_{e_3} et x_{e_4} Stable si $l_0 > a$

3)



4) $- \cdot - \cdot$: $x_e = 0$ équilibre stable donc $a > l_0 \to a_4 = 3l_0$

$\left.\begin{array}{l} \text{———} \\ \text{- - -} \\ \text{· - · -} \end{array}\right\}$ $a < l_0$ $\to a_1 = l_0/10$; $\to a_2 = l_0/3$; $\to E_p(0) = 0$

$E_{p_e}(0) \nearrow$ quand $|a - l_0| \nearrow$

$a_3 = l_0 \leftarrow$ cas où $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = 0$

Pendule asymétrique

1) $z = R\theta$

2) $E_c = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 = \frac{1}{2}(ml^2 + MR^2)\dot{\theta}^2$

3) " $E_p = E_{pp}$ de m + E_{pp} de M " $\quad E_p = -(mgl\cos\theta + Mgz) + Cte$

Si on choisit $E_p(\theta=0) = 0 \quad -mgl + Mg\times 0 + Cte = 0 \quad Cte = mgl$

$$E_p = mgl(1-\cos\theta) - MgR\theta$$

4) Equilibre : $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

$$mgl\sin\theta - MgR = 0 \qquad \sin\theta = \frac{MgR}{mgl} = \frac{MR}{ml}$$

Cette équation admet des solutions si $\frac{MR}{ml} \leq 1$.

$$M \leq \underbrace{\frac{ml}{R}}_{M_0}$$

5) $M < M_0 \qquad \theta_{e_1} = \arcsin\left(\frac{MR}{ml}\right) = \arcsin\left(\frac{M}{M_0}\right) \qquad \theta_{e_2} = \pi - \theta_{e_1}$

Ces 2 positions sont à la verticale l'une de l'autre $\rightarrow$ $\theta_{e_1} \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\theta_{e_2} \in]\pi/2, \pi]$

$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgl\cos\theta \qquad$ si θ_{e_1} est stable θ_{e_2} est instable car $\cos(\theta_{e_2}) = -\cos(\theta_{e_1})$

>0 si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\qquad \theta_{e_1}$ stable

<0 si $\theta \in]\pi/2, \pi] \qquad \theta_{e_2}$ instable

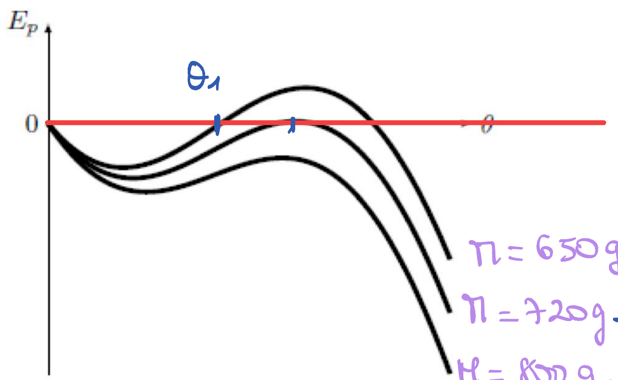
6) On observe θ_{e_1} et θ_{e_2}

minimum — maximum

$\sin\theta_{e_1} = \dfrac{MR}{ml}$ θ_{e_1} d'autant + plus grand que M est grande

La courbe la plus haute correspond à $M = 650g$

Etat lié pour $M < 720g$



$Em(0) = Ec(0) + Ep(0) = 0$

$M = 650g \rightarrow$ état lié entre $\theta = 0$ et θ_1

$M = 720g \rightarrow$ état lié entre $\theta = 0$ et θ_{e_2}

$M = 800g \rightarrow$ Etat de diffusion

7) $$E_m = \frac{1}{2}(ml^2 + MR^2)\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) - MgR\theta = Cte$$

d/dt

$$(ml^2 + MR^2)\ddot{\theta}\cancel{\dot{\theta}} + mgl\cancel{\dot{\theta}}\sin\theta - MgR\cancel{\dot{\theta}} = 0$$

$$(ml^2 + MR^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = MgR$$

On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$ ε : petit écart par rapport à θ_e

$\sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin\theta_e\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\cos\theta_e$ $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$

- Autour de θ_{e_1} :

$$(ml^2 + MR^2)\ddot{\varepsilon} + mgl(\underbrace{\sin\theta_{e_1}}_{\cancel{\frac{MR}{ml}}}\underbrace{\cos\varepsilon}_{\sim 1} + \cos\theta_{e_1}\underbrace{\sin\varepsilon}_{\sim\varepsilon}) = \cancel{MgR}$$

$$(ml^2 + MR^2)\ddot{\varepsilon} + \underbrace{mgl\cos\theta_{e_1}}_{>0}\,\varepsilon = 0$$

OHNA $\omega_0 = \left(\dfrac{mgl\cos\theta_{e_1}}{ml^2 + MR^2}\right)^{1/2}$

pulsation propre

$\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + \theta_{e_1}$ oscillations harmoniques autour de θ_{e_1}

θ_{e_1} est donc une position d'équilibre stable

• Autour de θ_{e_2} :

$$(ml^2+MR^2)\ddot{\varepsilon} + mgl(\sin\theta_{e_2}\underbrace{\cos\varepsilon}_{\sim 1} + \cos\theta_{e_2}\underbrace{\sin\varepsilon}_{\sim\varepsilon}) = \cancel{MgR}$$

$$\uparrow \quad \frac{\cancel{MR}}{ml}$$

$$(ml^2+MR^2)\ddot{\varepsilon} + \underbrace{mgl\cos\theta_{e_2}}_{<0}\,\varepsilon = 0 \qquad = -mgl\cos\theta_{e_1}$$

$$\theta(t) = A\exp(-\omega_0 t) + B\exp(\omega_0 t) + \theta_{e_2}$$ Diverge $\to$ Instable

Stabilité de l'équilibre

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+x^2}-b\right)^2$$ (cas semblable à l'oscillateur de Landau)

1) $F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx} = -k\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\left(\sqrt{a^2+x^2}-b\right)$

2) $F(x) = 0 \iff x_{e_1} = 0$ ou $\sqrt{a^2+x^2}-b=0$ $\quad a^2+x^2=b^2$

$x^2 = b^2-a^2$ $\qquad x = \pm\sqrt{b^2-a^2}$ si $b>a$

3) $$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(k\left(x - \frac{xb}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\right)$$

$$= k - kb\,\frac{\sqrt{a^2+x^2} - x^2/\sqrt{a^2+x^2}}{a^2+x^2}$$

• $x_{e_1} = 0$ $\qquad \dfrac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k(1-b/a)$ $\qquad$ $b<a$ stable

$b>a$ instable

• x_{e_2} tel que $x_{e_2}^2 = b^2-a^2$ $\quad (b>a)$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{e_2}) = k\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{b^2}{b^2}} + \frac{(b^2-a^2)}{b^2}\right) > 0$$ stable

4) $a = b$ 1 seule position d'équilibre $x_e = 0$

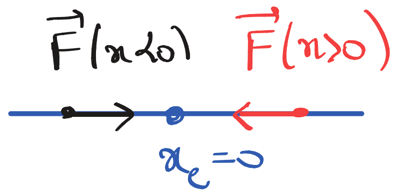
$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = 0$$

Il faut étudier le signe de $F(x)$ pour $x<0$ et $x>0$.

$$F(x) = -kx\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} < 1 \ \forall x$$

- $x>0$ $F(x)<0$
- $x<0$ $F(x)>0$



L'équilibre est stable.

(cas .... de l'oscillateur de Landau)