

Devoir surveillé n° 6

Durée : 2 heures

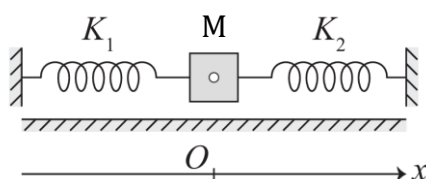
- ✓ La calculatrice est autorisée
- ✓ Les réponses doivent être **justifiées**.
- ✓ Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.
- ✓ **Critères de présentation** : un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.
Clarté de l'expression	Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1 ^{ère} lecture
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.
Mise en évidence des résultats	Résultats encadrés ou soulignés
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.

Exercice 1 : Vibrations d'une machine-outil

On modélise le stabilisateur d'une machine-outil rotative par une masselotte M de masse m se déplaçant horizontalement sans frottement solide sur un banc. Le stabilisateur est fixé à un bâti par deux supports élastiques assimilés à des ressorts de raideurs K_1 et K_2 , et de longueur à vide $l_{0,1}$ et $l_{0,2}$. On repère la position de M par son abscisse $x(t)$, comptée depuis la position d'équilibre O , dans laquelle les ressorts sont tous deux au repos.

Lorsque M est immobile, les ressorts sont non contraints (i.e. au repos).



Régime libre sans frottement

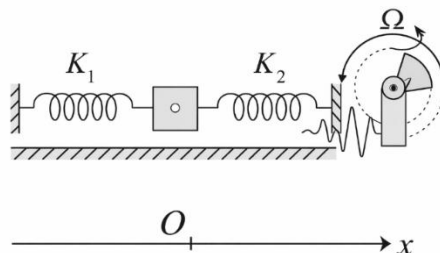
- Q1.** Exprimer, en fonction de x , les forces exercées par les deux ressorts sur M . En déduire l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique.
- Q2.** On prend comme conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$. Déterminer $x(t)$.

Régime libre avec frottement

- Q3.** On introduit un frottement fluide (Stokes) : $\vec{F}_S = -f \vec{v}$, avec $f > 0$ et où $\vec{v}$ est le vecteur à vitesse de M . Établir l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique en exprimant le facteur de qualité Q en fonction de m, f, K_1 et K_2 .
- Q4.** Résoudre, l'équation dans les trois régimes possibles selon les domaines du facteur de qualité. On ne déterminera pas les constantes introduites.
- Q5.** Lancement par choc : la masse est à l'équilibre avant $t = 0$ en $x(0) = 0$. On lui communique une vitesse initiale $\dot{x}(0) = v_0$. Donner l'expression exacte de $x(t)$ pour $Q > 1/2$.
- Q6.** Représenter graphiquement $x(t)$, dans les conditions précédentes.

Régime forcé

La machine-outil est désormais reliée au stabilisateur à l'extrémité droite du ressort de raideur K_2 .



Elle impose alors un déplacement horizontal $X(t) : X(t) = a \cos(\omega t)$.

On donne : $m = 20 \text{ kg}$; $K_1 = 3,0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $K_2 = 2,0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $Q = 5$; $a = 0,20 \text{ mm}$.

- Q7.** Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- Q8.** La résoudre en régime établi et exprimer l'amplitude $X_m(\omega)$ des oscillations de M .
- Q9.** Peut-il y avoir résonance ? Si, oui, à quelle condition sur Q ? (Condition à établir)
- Q10.** Pour $Q \gg 1$, donner une approximation de la pulsation de résonance ω_r et de l'amplitude maximale $X_{m,max}$.
- Q11.** Représenter graphiquement l'amplitude $X_m(\omega)$ selon la valeur de Q .
- Q12.** Calculer la fréquence de résonance f_r .
- Q13.** Calculer $X_m(\omega)$ pour $\omega = \omega_0$.
- Q14.** Comparer $X_m(\omega_0)$ au déplacement imposé a . Commenter.

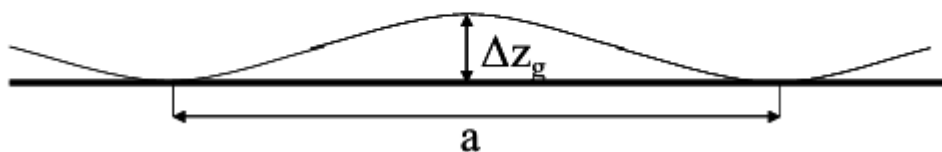
Exercice 2 : Vent de face et dénivelé en course à pied

Un coureur de masse m parcourt une distance L à vitesse uniforme v par rapport au référentiel terrestre. Pour cela, il fournit une puissance mécanique P , supposée constante et répartie en :

- Une puissance de locomotion interne $P_i > 0$ (déplacement des jambes, pertes internes, etc...) supposée constante en course ;
- Une puissance opposée aux actions mécaniques extérieures que le coureur doit vaincre pour avancer (résistance de l'air et au contact pied-sol...) et dont la puissance est P_{ext} .

On cherche, tout d'abord, à estimer la puissance nécessaire à l'élévation d'une foulée, fournie par l'impulsion du pied. On se contente d'une approche très globale : le centre de gravité du coureur va monter et descendre à chaque foulée (voir Figure 2).

Fig.2. Schématisation du mouvement du centre de gravité



Données : $m = 70 \text{ kg}$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, $a = 1 \text{ m}$, $\Delta z_g = 10 \text{ cm}$ et $v = 12 \text{ km/h}$.

Q15. Exprimer l'énergie nécessaire à l'élévation Δz_g .

Q16. En déduire l'expression de la puissance correspondante. Faire l'application numérique.

Pour estimer la puissance P_i , il faut bien sûr ajouter à cela la puissance nécessaire au maintien de la vitesse du coureur et tenir compte de pertes internes (type frottements aux niveaux des articulations). Pour la suite nous adopterons la valeur $P_i = 250 \text{ W}$.

On étudie maintenant une course en pente avec vent de face.

Les seuls frottements considérés sont ceux de l'air, modélisés par une loi quadratique de type « Venturi » et d'intensité : $F_v = \beta V^2$, où V est la vitesse du coureur par rapport à l'air et β une constante.

On note u la vitesse du vent par rapport au sol.

On suppose que la route présente un dénivelé positif total Δh uniformément réparti et on définit la déclivité moyenne :

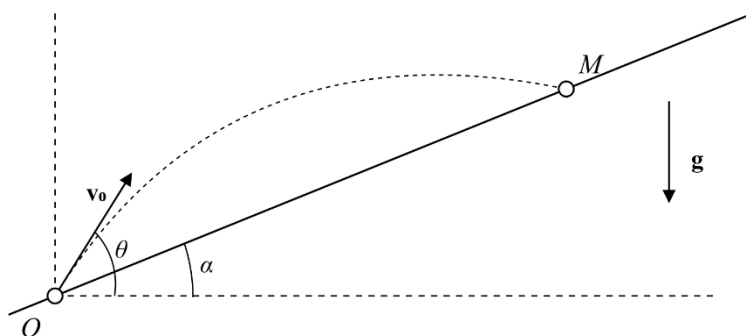
$$\delta = \frac{\Delta h}{L}$$

Données : $\delta = 0,02$, $\beta = 0,40 \text{ kg m}^{-1}$, $u = 20 \text{ km/h}$.

Q17. Déterminer l'expression littérale de la puissance que doit fournir le coureur pour maintenir sa vitesse v en fonction de P_i , v , δ , u , m , g et β , puis calculer P numériquement.

Problème : Portée maximale amont et angle de tir

On considère un corpuscule M , lancé depuis un point O appartenant à une piste rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre. On néglige toute action de l'air. Le projectile est lancé avec une vitesse initiale de norme v_0 , faisant un angle θ avec l'horizontale. On appelle portée amont la distance OM .



Q18. Déterminer l'angle de tir θ_M qui maximise la portée amont puis l'expression d_m de cette portée qu'on exprimera en fonction de g , v_0 et $\sin \alpha$ SEULEMENT.

FIN