Compléments Chapitre 14
Etude d'1 particule dans champ $\vec{B}$

1) $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$, résolution par la méthode des $\mathbb{C}$

$\vec{B} = B\vec{u}_z$

Système {particule} Réf terrestre supposé galiléen

Bdf $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Dans $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q\dot{y}B \\ -q\dot{x}B \\ 0 \end{vmatrix}$$

→ $\ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y}$ (1)

→ $\ddot{z} = 0$ $\dot{z} = C^{te} = 0$ $z = C^{te} = 0$

→ $\ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x}$ (2)

On pose $\boxed{\omega = \dfrac{qB}{m}}$ dont le signe dépend de celui de q.

Méthode $\mathbb{C}$: on introduit $\underline{u} = x + iy$

$$(1) + i(2) \Leftrightarrow \underbrace{\ddot{x} + i\ddot{y}}_{\ddot{\underline{u}}} = \underbrace{\omega(\dot{y} - i\dot{x})}_{-i\omega(\dot{x}+i\dot{y}) = -i\omega\dot{\underline{u}}}$$

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} = -i\omega\dot{\underline{u}}}$$

On intègre : $\underline{\dot{u}} = -i\omega\underline{u} + \underline{\dot{u}}(0)$ $\qquad \underline{\dot{u}}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0)$

$\underline{\dot{u}}(0) = v_0$

Equation différentielle dont la solution est de la forme :

$$\underline{u} = A\exp(-i\omega t) + \frac{v_0}{i\omega}$$

$\underline{u}(0) = x(0) + i\ y(0)) = 0 \qquad A = -\frac{v_0}{i\omega}$

$$\boxed{\underline{u} = \frac{v_0}{i\omega}\left(1-\exp(-i\omega t)\right)} = \frac{v_0}{\omega}\left(-i + i\cos(\omega t) - \sin(-\omega t)\right)$$

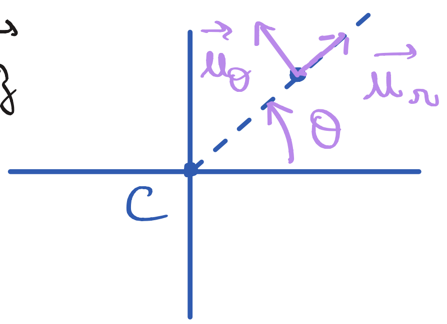
$x(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}) \qquad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$

$y(t) = \mathrm{Im}(\underline{u}) \qquad \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)}$

② $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_r$, étude en coordonnées polaires

$\vec{B} = B\vec{u}_z$

$\vec{u}_z$ ⊙



$\vec{F}_L$ ne travaille pas $\Rightarrow v = C^{te}$
$= v_0$

$\vec{F}_L = q v_0 \vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z$

On admet que le mouvement est circulaire : $\vec{v} = v_0\vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$

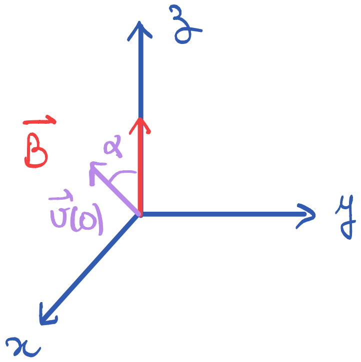
PFD $\quad -m\frac{v_0^2}{R} = q v_0 B \quad$ (q, v et B pouvant ê >0 ou <0)

qvB est nécessairement <0

puisque $-m\frac{v^2}{R} < 0$

$\rightarrow \boxed{R = \left|\frac{m v_0}{qB}\right|}$

③ $\vec{v}(0) = v_0\cos\alpha\,\vec{u}_z + v_0\sin\alpha\,\vec{u}_x$ $\qquad x(0) = y(0) = z(0) = 0$



$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q\dot{y}B \\ -q\dot{x}B \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow \ddot{z} = 0 \qquad \dot{z} = Cte = v_0\cos\alpha \qquad \boxed{z(t) = v_0\cos\alpha\; t}$

Pour la suite, on retrouve la même chose en remplaçant v_0 par $v_0\sin\alpha$.

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\sin(\omega t)}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\left(\cos(\omega t) - 1\right)}$$

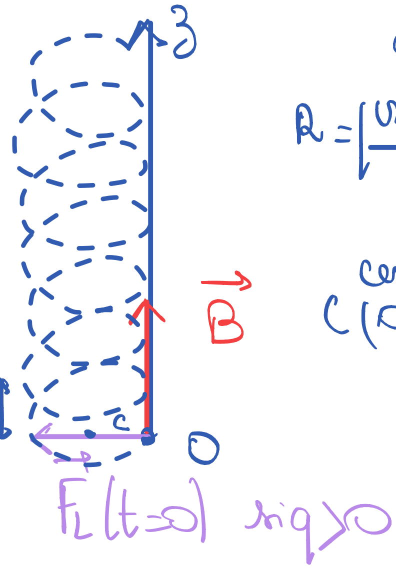
$$x^2 + \left(y + \frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\right)^2$$

↘ cercle de rayon $R = \left|\frac{v_0\sin\alpha\, m}{qB}\right|$ et de centre $C\left(0, -\frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\right)$

Le mouvement est hélicoïdal.

- rayon $\boxed{R = \left|\frac{v_0\sin\alpha\, m}{q\,B}\right|}$

- hélice d'axe Oz et de pas h



$h = v_0\cos\alpha\,\Delta t_{1tour}$

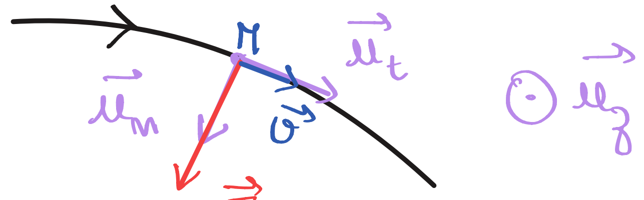
$$\Delta t_{1tour} = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi\frac{m}{|qB|} \Rightarrow h = \cancel{v_0}\cos\alpha\; 2\pi\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{v_0}\sin\alpha\,\cancel{m}}\,R$$

$$\boxed{h = \frac{2\pi R}{\tan\alpha}}$$

④ $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$, étude dans le repère de Frenet

$\vec{B} = B\vec{u}_z$

$\vec{F}_m$ courbe la trajectoire



$\vec{F}_m$ ne travaille pas $\Rightarrow v = Cte = v_0$

Par définition de $\vec{u}_t$: $\vec{v} = v_0 \vec{u}_t$ $(v_0 > 0)$

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{\rho}\vec{u}_n + \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{0}\vec{u}_t$$

rayon de courbure en M $\rightarrow \rho$

$\vec{F}_m$ est nécessairement dans la courbure donc sa coordonnée selon $\vec{u}_n$ est > 0.

<u>PFD selon $\vec{u}_n$</u> : $m\frac{v_0^2}{\rho} = |q v_0 B|$

$\rho = \left|\frac{qB}{m v_0}\right| = Cte$ → la trajectoire est circulaire

$$\boxed{R = \left|\frac{qB}{m v_0}\right|}$$