

Chapitre 17

Solide en rotation autour d'un axe fixe

I. Mécanique du solide

1. Définition
2. Cinématique d'un solide
  - 2.1 Mouvement général
  - 2.2 Solide en translation
  - 2.3 Cas particulier : solide en rotation autour d'un axe fixe

II. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe fixe

1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
2. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté

III. Moment d'une force par rapport à un axe

1. Rappels
3. Couple

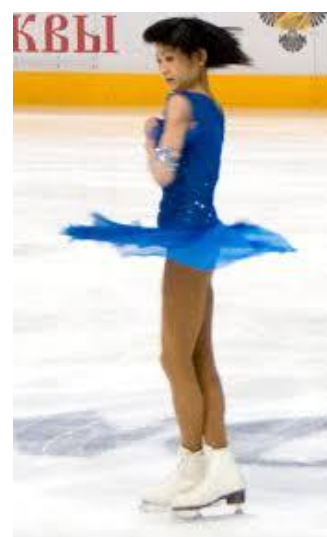
4. Liaison pivot

IV. Théorème du moment cinétique scalaire

1. Enoncé
2. Equilibre
3. Le pendule pesant
4. Pendule de torsion

V. Etude énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

1. Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation autour d'un axe
2. Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe
3. Energies potentielles
4. Théorème de la puissance cinétique
5. Analogies entre translation selon un axe et rotation autour d'un axe



« *Donnez-moi un point d'appui, et je soulèverai le monde.* » Archimède

## Le cours

### I. Mécanique du solide

#### 1. Définition

Un solide est un système tel que pour tout couple de points du système  $M_1$  et  $M_2$ , la distance  $M_1M_2$  reste constante au cours du mouvement. C'est un système indéformable.

On oppose les solides aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres (*exemple : un ressort*).

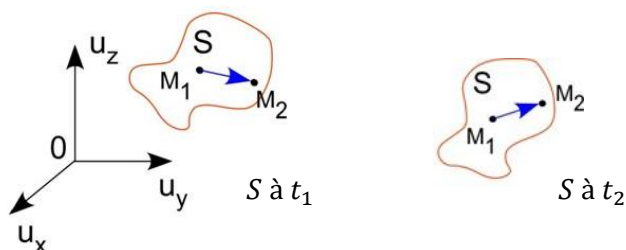
La répartition des masses dans un solide est en général, décrite de manière continue : le solide peut être découpé en éléments infinitésimaux de masse  $dm$ . La masse totale du solide est  $m = \iiint_{\text{solide}} dm$  (intégrale triple sur le volume du solide).

#### 2. Cinématique d'un solide

On considère deux points  $M_1$  et  $M_2$  appartenant à un solide  $S$ . Etudions le mouvement du solide dans un référentiel  $\mathcal{R}$ .

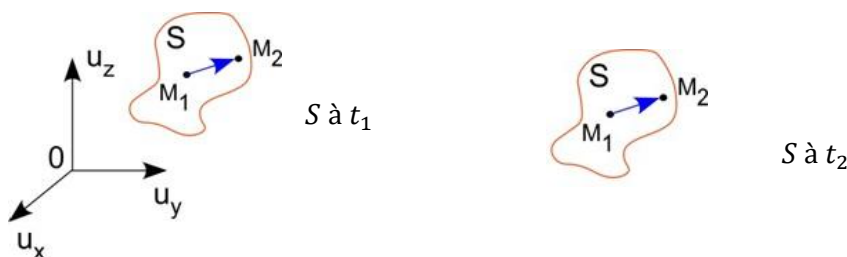
##### 2.1 Mouvement général

De façon générale, le mouvement d'un solide peut être décomposé en une translation et trois rotations autour d'axes fixes.



##### 2.2 Solide en translation

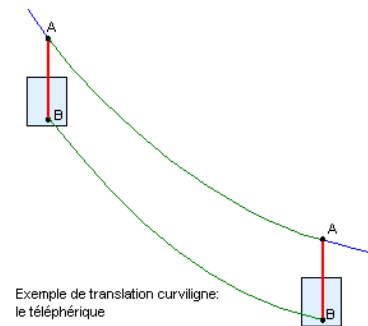
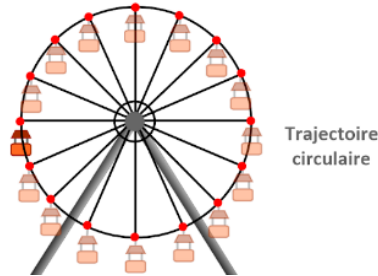
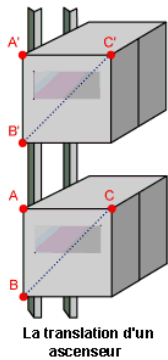
Si la direction et le sens de  $\overrightarrow{M_1M_2}$  sont constants dans  $\mathcal{R}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{cte}$ , le solide est en **translation**.



**Tous les points d'un solide en translation ont le même vecteur-vitesse dans  $\mathcal{R}$ , leurs trajectoires sont superposables.**

La vitesse d'un seul point suffit pour connaître la vitesse de chaque point du solide.

La translation peut être rectiligne (cabine d'ascenseur), circulaire (cabine de grande roue) ou de manière plus générale curviligne.

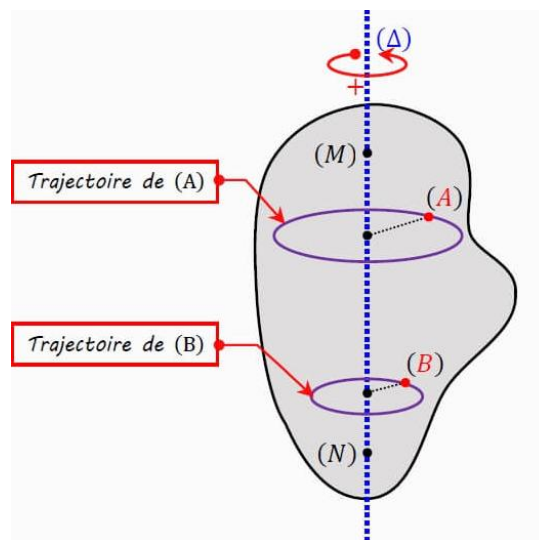


On assimile le solide de masse  $m$  à un point matériel situé en son centre de masse  $G$  et on travaille dans le cadre de la mécanique du point. On utilise le théorème de la résultante cinétique :

$$m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{ext}$$

### 2.3 Cas particulier : solide en rotation autour d'un axe fixe

On va se concentrer dans ce chapitre uniquement aux mouvements de rotation autour d'un axe fixe.



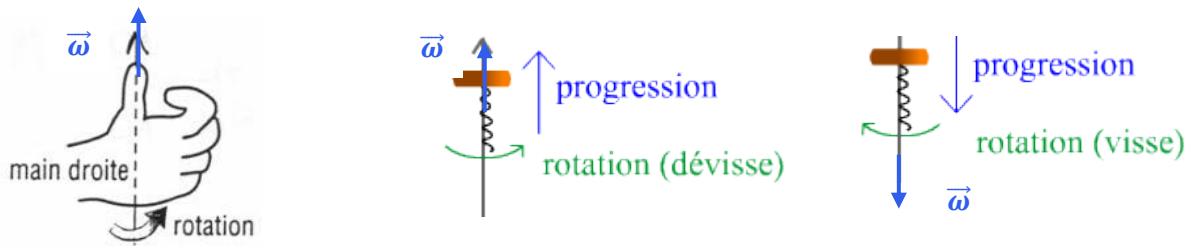
Un solide est en rotation autour d'un axe fixe, droite fixe dans l'espace, si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de cet axe. Cet axe pouvant passer ou non par le solide.

Tous les points du solide ont alors la même vitesse angulaire dans  $\mathcal{R}$ , leurs trajectoires sont des cercles centrés sur l'axe de rotation.

Pour caractériser une telle rotation, il nous faut donner l'axe de rotation  $\Delta$ , le sens de la rotation et la vitesse angulaire de la rotation.

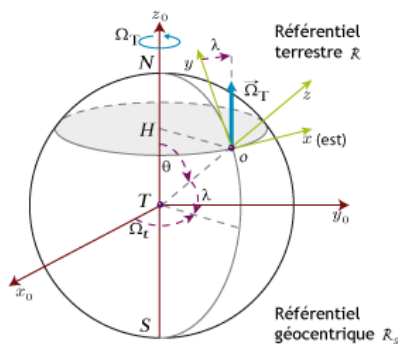
On peut condenser ces trois informations en un vecteur, le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  du solide dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

La direction du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  est celle de l'axe de rotation, son sens est donné par la règle de la main droite ou du tire-bouchon, il dépend du sens de la rotation, et sa norme est égale à la vitesse angulaire.



Le pouce donne le sens du vecteur vitesse angulaire. La progression du tire-bouchon donne le sens du vecteur vitesse angulaire.

Exemple : la Terre autour de son axe N-S



Supposons un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe orienté  $(\Delta)$ .

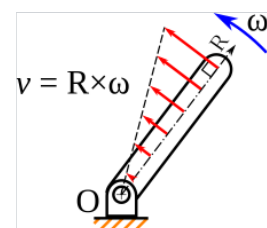
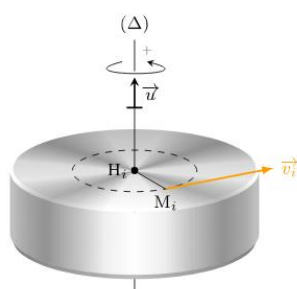
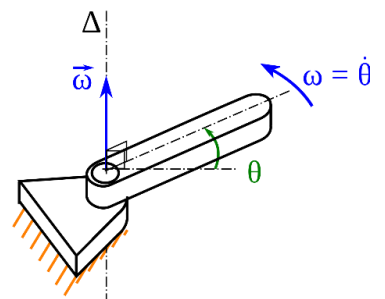
On définit le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  de l'axe de rotation  $\Delta$  (dirigé selon l'axe mais de sens arbitraire). L'orientation de ce vecteur définit le sens positif de la rotation.

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_\Delta$$

(si le solide tourne dans le sens positi : la coordonnée  $\omega > 0$  et  $\omega$  est la vitesse angulaire, sinon  $\omega < 0$ )

Le mouvement de tout point du solide étant circulaire centré sur l'axe, il est naturel de travailler en **coordonnées cylindriques** :

- La vitesse angulaire de rotation du solide est :  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- L'axe de rotation  $\Delta$  est l'axe Oz :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ .
- Le vecteur vitesse d'un point  $M_i$  est  $\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta$  où  $r = H_i M_i$  est la distance du point  $M_i$  à l'axe de rotation.



## II. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe fixe

### 1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

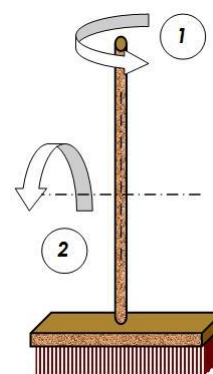
On a vu dans le cas d'un point matériel que la grandeur qui mesure l'inertie du système (= capacité du système à s'opposer à toute modification de son mouvement) est sa masse : à force constante, plus la masse du système est importante, plus son accélération sera faible (conséquence du PFD), donc « plus le système perdurera dans son mouvement ».

**Dans le cas des rotations, la masse seule est insuffisant pour mesurer l'inertie d'un corps vis-à-vis d'un mouvement de rotation : le choix de l'axe de rotation et la répartition de la masse autour de celui-ci sont importants.**

*Prenons, par exemple le cas d'un balai pris en main au milieu du manche.*

*Il est plus facile de le faire tourner autour de l'axe du manche (cas1), qu'autour de l'axe perpendiculaire au manche (cas 2).*

*Cette différence est liée au fait que la masse est répartie différemment autour de ces 2 axes.*



**La grandeur qui mesure l'inertie d'un système vis-à-vis d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$  est son moment d'inertie par rapport à cet axe,  $J_{\Delta}$ . Il traduit la répartition de la masse autour de cet axe, il est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe de rotation.**

**Unité :  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$**

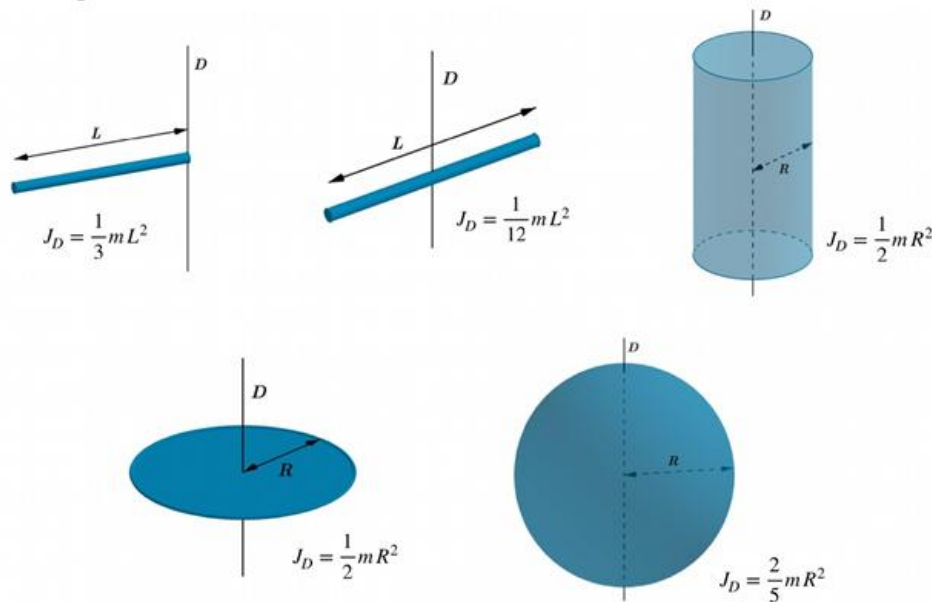
*Cas du balai : La masse du balai est essentiellement située au niveau de la brosse. Dans le cas (2), la brosse est située plus loin de l'axe de rotation que dans le cas (1), le moment d'inertie du balai par rapport à l'axe (2) est donc plus grand que par rapport à l'axe (1).*

*Exemple d'une patineuse : Le moment d'inertie d'un corps change si l'on modifie la façon dont sa masse est répartie autour de l'axe de rotation. Ce phénomène est bien illustré par une patineuse qui tournerait sur elle-même les bras écartés avant de les ramener le long du corps. Lorsqu'elle a les bras écartés, son moment d'inertie est plus grand, parce qu'une partie de sa masse est située plus loin de l'axe de rotation.*



- Pour une masse ponctuelle  $m$  située à une distance  $R$  de l'axe de rotation  $\Delta$  :  $J_{\Delta} = mR^2$
- Le moment d'inertie  $J_{\Delta}$  d'un ensemble de points matériels  $M_i$  par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) est :  $J_{\Delta} = \sum m_i r_i^2$
- Le moment d'inertie  $J_{\Delta}$  d'un solide  $S$  par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) est :  $J_{\Delta} = \iiint dm r^2$

Exemples pour quelques solides homogènes :



## 2. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté

Dans le cas d'un point matériel, le PFD traduit que la grandeur qui varie sous l'effet d'une force est le vecteur quantité de mouvement  $\vec{p} = m\vec{v}$ , on définit, pour un mouvement de rotation autour d'un axe, une grandeur analogue, le moment cinétique par rapport à une axe.

**On appelle moment cinétique d'un solide par rapport à un axe  $\Delta$  orienté la quantité scalaire :**

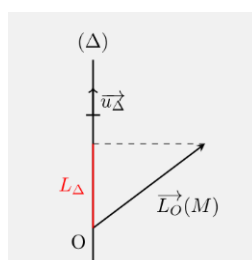
$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$$

où  $J_{\Delta}$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$  et  $\omega$  la coordonnée du vecteur vitesse angulaire selon ce même axe.

**Unité :  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$**

Remarque :

Pour un point matériel  $M_i$ , on définit le moment cinétique  $\vec{L}_O(M_i)$  en un point  $O$  de l'axe  $\Delta$ ,  $L_{\Delta}(M_i)$  n'est rien d'autre que la projection de  $\vec{L}_O(M_i)$  sur l'axe  $\Delta$ , indépendamment du point  $O$  de l'axe.



- Le moment cinétique  $L_\Delta$  d'un ensemble de points matériels  $M_i$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est :  $L_\Delta = (\sum m_i r_i^2) \omega$
- Le moment d'inertie  $J_\Delta$  d'un solide  $S$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est :  $L_\Delta = ( \iiint dm r^2 ) \omega$

### III. Moment d'une force par rapport à un axe

#### 1. Rappels

En valeur absolu, le moment d'une force par rapport à un axe mesure la capacité qu'à la force à faire tourner le système autour de ce même axe.

Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport un axe orienté  $\Delta$  est la grandeur scalaire  $M_\Delta(\vec{F})$  telle que :

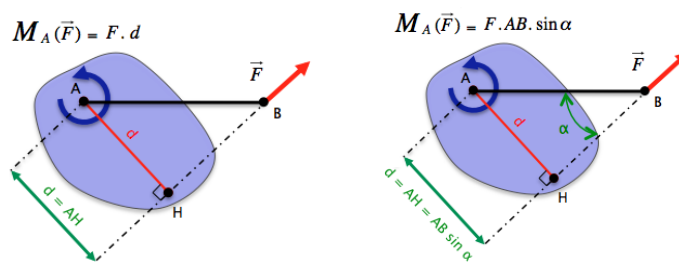
$$M_\Delta(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \pm F_\perp d$$

Où  $O$  est un point quelconque de l'axe  $\Delta$ ,  $F_\perp$  est la norme de la composante perpendiculaire à l'axe  $\Delta$  de la force  $\vec{F}$  et  $d$  le bras de levier (la distance entre l'axe  $\Delta$  et la droite d'action).

Le signe se détermine en regardant dans quel sens la force fait tourner le solide, il dépend de l'orientation de l'axe :

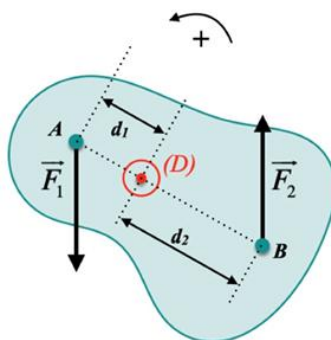
- Si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le système dans le sens positif,  $M_\Delta > 0$ ,  $M_\Delta = F_\perp \cdot d$
- Si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le système dans le sens négatif,  $M_\Delta < 0$ ,  $M_\Delta = - F_\perp \cdot d$

Il est conseillé de n'appliquer la méthode du bras de levier que si la force appartient à un plan orthogonal à l'axe, dans le cas contraire il est préférable d'utiliser le produit vectoriel et de projeter.

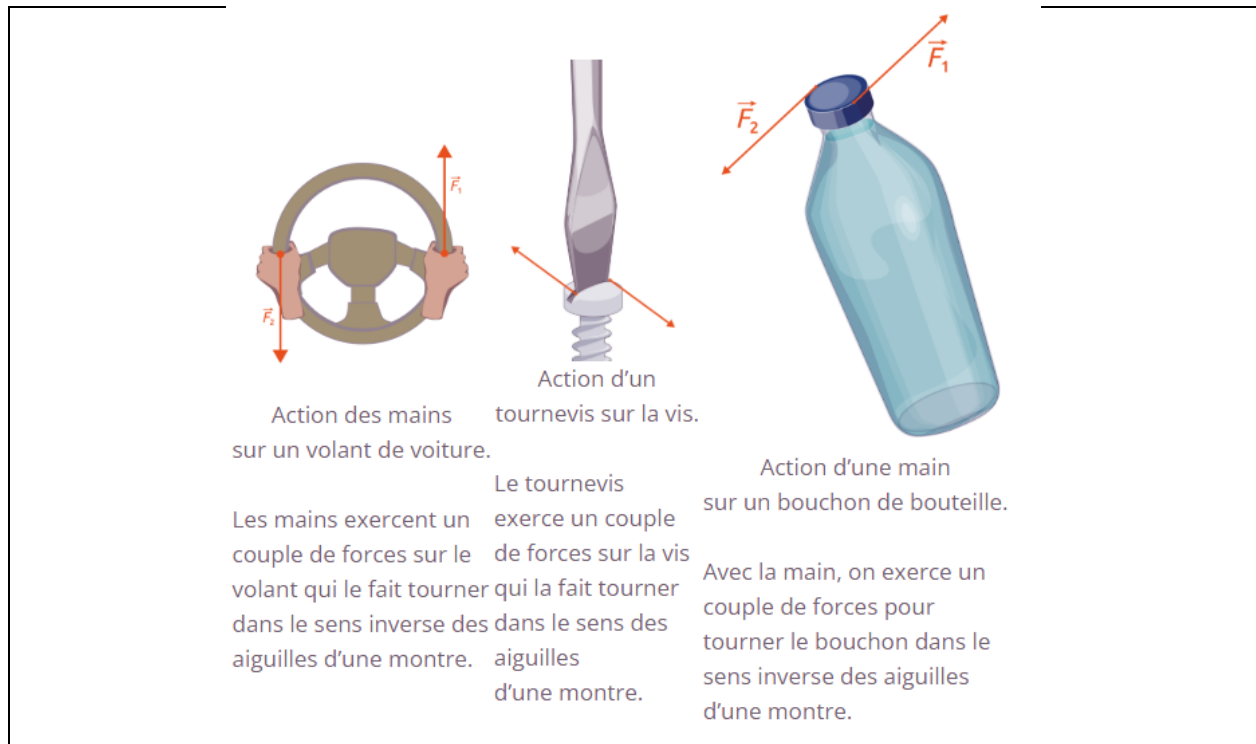


#### 2. Couple

On appelle couple de forces un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment non nul.



Exemples :

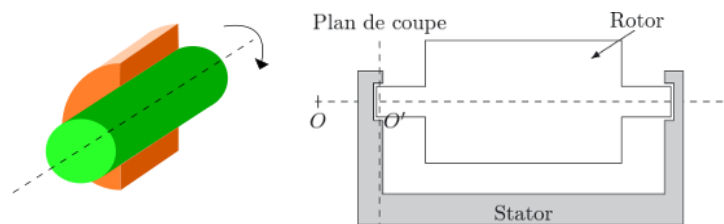


### 3. Liaison pivot

Pour qu'un solide soit en rotation autour d'un axe, il faut qu'un mécanisme lui permette de rester lié à cet axe.

**Une liaison pivot est un mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté de rotation autour d'un axe.**

Les machines mécaniques rotatives sont composées d'une pièce mobile appelée **rotor** qui est entraînée ou freinée dans une autre pièce appelée **stator** le plus souvent immobile.



Exemples : charnières d'une porte ou du hayon d'une voiture ; dans un vélo : au niveau des roues, du guidon, du pédalier...

Le solide subit de la part du mécanisme un ensemble de forces de résultante  $\vec{R}_{axe}$ , de moment  $M_{\Delta}(\vec{R}_{axe})$ .

**En l'absence de frottements, la résultante coupe l'axe et la liaison est dite parfaite. Le moment des forces exercées par le mécanisme par rapport à l'axe de rotation est nul :**

$$M_{\Delta}(\text{liaison parfaite}) = 0.$$

Les forces de frottement au niveau de l'axe se traduisent par **un couple résistant**. Les 2 modèles les plus couramment rencontrés sont :

- Frottements fluides linéaires :  $\Gamma_{\Delta}(\vec{R}_{axe}) = -\alpha \omega$ , couple opposé à la vitesse angulaire.
- Frottements solides :  $\Gamma_{\Delta}(\vec{R}_{axe}) = \text{constante}$ , de signe opposé à  $\omega$ .

Dans la plupart des exercices, pour simplifier on supposera que la liaison pivot est idéale, cela ne signifie pas que la force de contact est nulle ; il est impératif de mentionner la liaison pivot dans le bilan des forces. C'est le pendant de la réaction du support que l'on a déjà rencontré dans les mouvements de translation.

## IV. Théorème du moment cinétique scalaire

### 1. Enoncé

**Dans un référentiel galiléen R, la dérivée du moment cinétique d'un solide par rapport à un axe fixe D de R est égale au moment par rapport à cet axe de toutes les forces extérieures appliquées au solide :**

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) \Leftrightarrow J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext})$$

Remarques :

- L'application du théorème conduit à une équation différentielle en  $\omega$  ou  $\theta$  que l'on doit résoudre pour obtenir la loi d'évolution de la vitesse angulaire de rotation ou de l'angle  $\theta$ . De manière analogue, le PFD, le TPC ou le TPM permettait d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ou la position.
- On tient compte que des actions extérieures car, conséquence de la 3<sup>ème</sup> loi de Newton, le moment total des forces intérieures est nul.  $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{int}) = \vec{0}$ .

### 2. Equilibre

**Equilibre d'un solide susceptible de tourner autour d'un axe fixe :  $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = 0$**

Dans le cas d'une liaison pivot idéale, l'application du TMC scalaire permet de s'affranchir de force inconnue comme  $\vec{R}_{axe}$ .

### 3. Le pendule pesant

Un pendule pesant est un solide en rotation autour d'un axe fixe horizontal,  $\Delta$ .

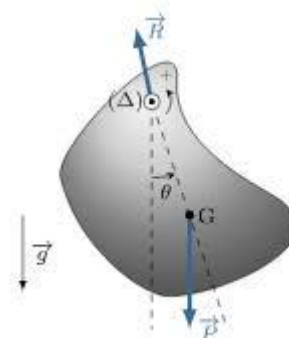
Système étudié : le solide en rotation autour de  $\Delta$ , de masse  $m$ , de centre de masse  $G$  ( $OG = l$ ) et de moment d'inertie  $J_{\Delta}$  par rapport à l'axe  $\Delta$ .

Référentiel : terrestre supposé galiléen

On suppose la liaison pivot idéale. On néglige tout autre frottement.

Bilan des actions mécaniques :

- Poids appliqué en  $G$  :  $M_{\Delta}(\vec{m}\vec{g}) = -mgl \sin\theta$
- La réaction de l'axe :  $M_{\Delta}(\vec{R}_{axe}) = 0$



On applique le TMC scalaire selon l'axe  $\Delta$  :  $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = -mgl \sin\theta$

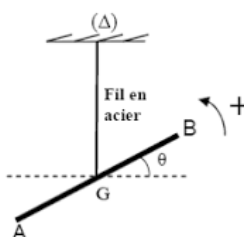
On obtient l'équation différentielle suivante :  $\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_{\Delta}} \sin\theta = 0$

Cette équation se linéarise dans l'approximation des petits angles :  $\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_{\Delta}} \theta = 0$ . On reconnaît alors

l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_{\Delta}}}$ .

#### 4. Pendule de torsion

Un pendule de torsion est un solide accroché à un fil vertical et pouvant tourner autour d'un axe fixe  $\Delta$  confondu avec le fil. On fait tourner le fil sur lui-même de manière à le « tordre » et on lâche sans vitesse initiale : la barre se met à tourner autour de l'axe (Oz) Le fil exerce un couple de rappel. Analogue à l'oscillateur élastique (avec ressort).



Système étudié : le solide en rotation autour de  $\Delta$ , de masse  $m$ , de centre de masse  $G$  se trouvant sur le fil et de moment d'inertie par rapport à l'axe  $J_{\Delta}$ .

Référentiel : terrestre supposé galiléen

On néglige tout frottement.

Bilan des actions mécaniques :

- Poids appliqué en  $G$  :  $M_{\Delta}(\vec{m}\vec{g}) = 0$  (colinéaire au fil)
- La réaction du fil :  $M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$  (colinéaire au fil)
- Un couple de torsion (couple de rappel)  $\Gamma_{\Delta} = -C\theta$  (si  $\theta = 0$  à l'équilibre)

On applique le TMC scalaire selon l'axe  $\Delta$  :  $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = -C\theta$

On obtient l'équation différentielle suivante :  $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0$ . On reconnaît alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$ .

### V. Etude énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

#### 1. Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation autour d'un axe

**La puissance d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un solide en rotation autour d'un axe D à la vitesse angulaire  $w$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est :**

$$P(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \omega$$

**Conséquence :  $P(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$**

Son travail est donc :  $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B P(\vec{F}) dt = \int_A^B M_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega dt = \int_A^B M_\Delta(\vec{F}) \cdot d\theta$

## 2. Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

**L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  à la vitesse angulaire  $\omega$  dans**

**le référentiel  $\mathcal{R}$  est :  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$**

## 3. Energies potentielles

Energie potentielle de pesanteur d'un solide de centre de masse  $G$  :  $E_{pp} = mgz_G + Cte$

Energie potentielle de torsion :  $E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$  (si  $\theta = 0$  à l'équilibre)

## 4. Théorème de la puissance cinétique

On multiplie le TMC scalaire par  $\omega$  :  $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} \omega = (\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext})) \cdot \omega \Rightarrow J_\Delta \frac{d\omega^2}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext})$

**La dérivé de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $D$  à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen est égale à la somme des puissances des forces extérieures appliquées au solide :**

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext})$$

**On reprend l'exercice du pendule pesant :** La liaison pivot est parfaite, donc son moment par rapport à l'axe de rotation est nul, et donc sa puissance aussi.

Puissance du poids :  $P(\vec{m}\vec{g}) = -mgl \sin\theta \omega$

TPC :  $\frac{d(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2)}{dt} = -mgl \sin(\theta) \omega$  avec  $\omega = \dot{\theta} \Rightarrow J_\Delta \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mgl \sin(\theta) \dot{\theta} \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} = -mgl \sin(\theta)$

On retrouve le résultat obtenu avec le TMC scalaire. Ces 2 lois sont équivalentes.

Comme dans le cas du point matériel, en intégrant cette relation entre deux instants ou deux points A et B de la trajectoire, on obtient **le théorème de l'énergie cinétique**.

**Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, la variation d'énergie cinétique entre deux points A et B de la trajectoire est la somme des travaux des forces extérieures appliquées entre ces deux points :**  $\Delta E_c = W_{total}(\vec{F}_{ext})$

$$\Delta E_c = W_{total}(\vec{F}_{ext})$$

**En distinguant forces conservatives et forces non conservatives, on obtient le théorème de**

**l'énergie mécanique :**  $\Delta E_m = W_{total}(\vec{F}_{ext,nc})$  ou  $\frac{dE_m}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext,nc})$

## 5. Analogies entre translation selon un axe et rotation autour d'un axe

Mouvement	Translation	Rotation autour d'un axe
Inertie	Masse	Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation
Vitesse	Vecteur vitesse	Vitesse angulaire
Grandeur cinématique	Quantité de mouvement $\vec{p} = m \vec{v}$	Moment cinétique $\sigma_D(S) = J_D \omega$
Grandeur dynamique	Résultante des forces	Somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation.
Relation à appliquer	La dérivée de la grandeur cinématique = grandeur dynamique. 2 <sup>de</sup> loi de Newton	La dérivée de la grandeur cinématique = grandeur dynamique. Théorème du moment cinétique scalaire
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2} m v^2$	$E_c = \frac{1}{2} J_D \omega^2$

## La physique du patinage artistique

*Par Jonathan Parienté Publié le 23 février 2010 à 14h18*

Si vous avez raté l'incroyable performance du Français Brian Joubert sur la glace de Vancouver, voici une cession de rattrapage.

Avez-vous déjà remarqué qu'un patineur sachant patiner joue de ses bras quand il tourne sur lui-même en l'air ou sur la glace. Ces effets de manche n'ont pas qu'une finalité artistique. Le patineur applique en fait un principe physique qui lui permet, d'un mouvement de bras, d'augmenter considérablement sa vitesse de rotation et éventuellement sa note, s'il ne se casse pas la figure juste après.

Pour se transformer en toupie humaine le secret du patineur ne se trouve pas uniquement dans l'action de ses patins. Vous pouvez le voir dans la vidéo ci-dessus, autant Philippe – alias d'Artagnan – que Brian ramènent leurs bras sur leurs torsos au début de leur rotation. Et les écartent à nouveau pour freiner leur mouvement.

En modifiant la position de ses bras le patineur modifie ce que l'on appelle, moment d'inertie. Plus le moment d'inertie du patineur diminue plus la vitesse de rotation augmente.

La masse du patineur est répartie autour de son axe de rotation qui va de la tête jusqu'aux pieds. Comme l'animal est articulé, la masse est distribuée à des distances plus ou moins importantes de cet axe.

Bras tendus, la masse des bras est plus éloignée de l'axe de rotation, augmentant ainsi le moment d'inertie. Lorsque le patineur les ramène sur son torse le moment d'inertie diminue. Les variations du moment d'inertie sont d'autant plus importantes dans ce cas que celui-ci dépend du carré de la distance entre la masse et l'axe de rotation.

Faites le test avec un balai. Il est beaucoup plus aisé de le faire tourner rapidement selon l'axe vertical (de la poignée jusqu'à la brosse) plutôt que selon l'axe passant par le milieu du manche - façon moine shaoling. Dans le premier cas, la masse du balai est beaucoup plus proche de l'axe que dans le second, et donc le moment d'inertie moins important.

Pour ceux qui veulent mettre les mains dans le cambouis de la mécanique, voici l'explication moins succincte. Dans le cas de notre patineur, il y a conservation du moment cinétique. Ce dernier est égal au produit de la vitesse de rotation par le moment d'inertie. Lorsque le moment d'inertie diminue, la vitesse de rotation augmente. A la plus grande joie de d'Artagnan.

Avis aux amateurs, la prochaine fois que vous y irez à la patinoire, gardez vos bras près de vous pour tourner plus vite sur vous-même.

**Source :** [https://www.lemonde.fr/sciences/article/2010/02/23/la-physique-du-patinage-artistique\\_5980436\\_1650684.html](https://www.lemonde.fr/sciences/article/2010/02/23/la-physique-du-patinage-artistique_5980436_1650684.html)

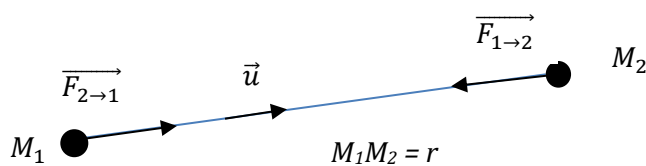
## Pour aller plus loin : bilan énergétique pour un système déformable

Nous avons étudié jusqu'à présent le cas d'un système indéformable et en particulier celui du solide en rotation autour d'un axe fixe. Les lois de la dynamique énoncées ne font alors intervenir que les forces extérieures. Un système est pourtant soumis également à un ensemble de forces intérieures.

Du fait de la 3<sup>ème</sup> loi de Newton, la somme des forces intérieures est nulle ainsi que la somme de leurs moments.

**La puissance des forces intérieures est, quant à elle, en général non nulle.**

Considérons un système constitué de 2 points matériels  $M_1$  et  $M_2$ . Le système est soumis à des actions extérieures qui se traduisent par des forces appliquées à  $M_1$  et  $M_2$ , et à des actions intérieures qui sont les forces d'interaction entre les deux points,  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ . D'après la 3<sup>ème</sup> loi de Newton :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ .



Puissance totale des forces intérieures dans un référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$P_{int} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \left( \left( \frac{d\vec{OM}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}} - \left( \frac{d\vec{OM}_2}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \right) = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \left( \frac{d(\vec{OM}_1 - \vec{OM}_2)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \left( \frac{d\vec{M}_2\vec{M}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \left( \frac{d(r\vec{u})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \left( r \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \frac{dr}{dt} \vec{u} \right)$$

$$\text{Or } \vec{u}^2 = Cte = 1 \Rightarrow \frac{d(\vec{u}^2)}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{d(\vec{u})}{dt} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(\vec{u})}{dt} \perp \vec{u} \text{ donc } \frac{d(\vec{u})}{dt} \perp \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$P_{int} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \frac{dr}{dt} \vec{u} = -\|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\| \frac{dr}{dt}$$

**Pour qu'une force intérieure travaille, il faut que la distance entre deux points du système varie et donc que le système soit déformable.**

**Pour un système indéformable tel qu'un solide, la puissance totale des forces intérieures est nulle.**

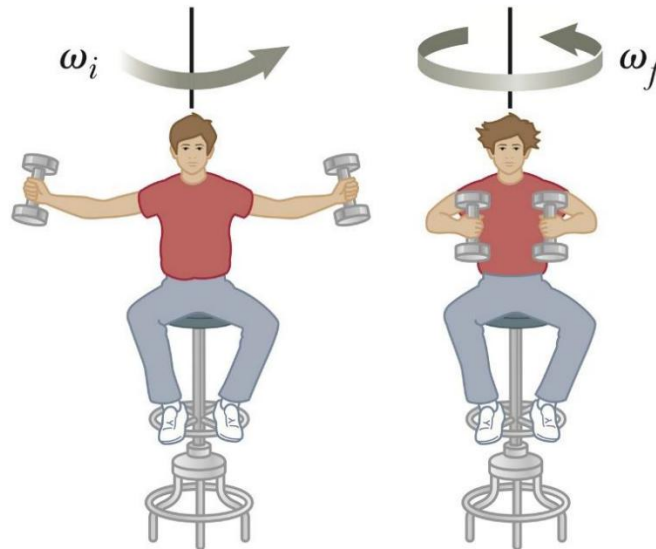
**On se place dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système mécanique est égale à la somme des puissances des forces intérieures et extérieures.**

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

**La variation de l'énergie cinétique d'un système mécanique est égale à la somme des travaux des forces intérieures et extérieures :  $\Delta E_c = W_{int} + W_{ext}$**

**Exemple : bilan énergétique du tabouret d'inertie**

<http://alain.lerille.free.fr/VideosPhysique/ConservationMomentCinetique.html>



On constate qu'un rapprochement des haltères de l'axe de rotation augmente notablement la vitesse de rotation :  $\omega_f > \omega_i$ .

Systeme : {partie mobile du tabouret + homme + haltères}

Bilan des forces extérieures : poids du système et liaison pivot supposée idéale

TMC scalaire :  $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext})$

Le moment du poids par rapport à l'axe  $\Delta$  (axe Oz) vertical est nul car le poids est parallèle à l'axe.

Dans l'hypothèse d'une liaison pivot idéale :  $M_{\Delta, liaison} = 0$ .

On a donc  $M_{\Delta, ext} = 0$ . Le moment cinétique par rapport à l'axe se conserve  $J\omega = Cte$ .

- Position 1 : bras tendus, haltères loin de l'axe de rotation, moment d'inertie  $J_1$ .
- Position 2 : bras repliés, haltères près de l'axe de rotation, moment d'inertie  $J_2$ .

$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ ,  $J_1 > J_2$  donc  $\omega_2 > \omega_1$  : la vitesse angulaire de rotation augmente.

Bilan énergétique :  $\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}$

$W_{ext} = 0$  car la liaison pivot au niveau de l'axe de rotation du tabouret est supposée idéale et que le poids ne travaille pas au cours du mouvement (le centre de masse reste fixe).

$\Delta E_c = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = W_{int}$

Seule la prise en compte du travail des forces intérieures permet d'expliquer la variation de l'énergie cinétique du système.

$E_{c2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{J_1}{J_2} \omega_1 \right)^2 = \frac{J_1}{J_2} E_{c1}$  or  $J_2 < J_1$  d'où  $E_{c2} > E_{c1}$ .

- Passage de 1 → 2 :  $\Delta E_c > 0$  donc  $W_{int} > 0$
- Passage de 2 → 1 :  $\Delta E_c < 0$  donc  $W_{int} < 0$