



TD 16 – Théorème du moment cinétique et mouvement dans un champ de forces centrales

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

- Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.
- Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.
- Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.
- Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
- Point matériel soumis à un champ de force centrale : conservation du moment cinétique et conséquences.
- Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement et construire une énergie potentielle effective.
- Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
- Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
- Mouvement des satellites et des planètes : lois de Kepler, période de révolution.
- Satellite géostationnaire.
- Etablir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.

J'apprends mon cours : Questions de cours, exercices 1, 4, 5

Questions de cours

- Q1.** Justifier que le mouvement dans un champ de force centrale est plan.
- Q2.** Qu'est-ce qu'une force newtonienne ? Citer des exemples
- Q3.** Énoncer les lois de Kepler.
- Q4.** Démontrer la 3^{ème} loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.
- Q5.** Planète en orbite circulaire : montrer que le mouvement est uniforme et calculer sa période.
- Q6.** Établir l'expression de l'énergie mécanique d'une planète ou d'un satellite en mouvement circulaire. Généraliser cette expression au cas d'un mouvement elliptique.

Exercices

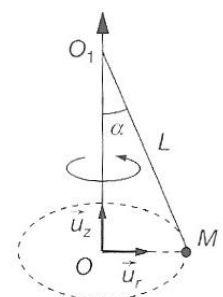
Exercice 1 : Pendule conique



Ref. 0123

✓ *Théorème du moment cinétique*

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L , attaché à un point O_1 fixe d'un axe Oz . Le point matériel est astreint à tourner autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω , dans le référentiel galiléen d'étude (Ox, Oy, Oz) .



- 1) Exprimer le moment cinétique en O_1 en utilisant la base cylindrique telle que $\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_r$.
- 2) Appliquer le théorème du moment cinétique en O_1 et en déduire l'angle d'inclinaison α constant du pendule avec Oz en fonction de L, ω et g , norme du champ de pesanteur.

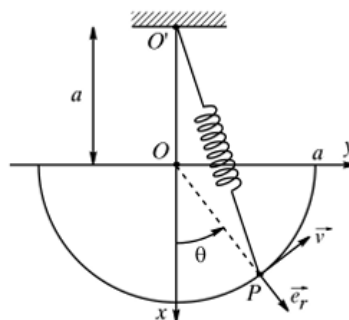
Exercice 2 : Mouvement d'une perle ♥


Ref. 0124

- ✓ Oscillateur non harmonique
- ✓ Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre
- ✓ Stabilité d'un équilibre

Une perle quasi ponctuelle P , de masse m , est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a . Le point P est attaché à un ressort de raideur k et de longueur au repos $l_0 = \sqrt{3} (a - mg/k)$ dont l'extrémité est fixée en O' ($OO' = a$). Le point P est repéré par l'angle θ , on suppose $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

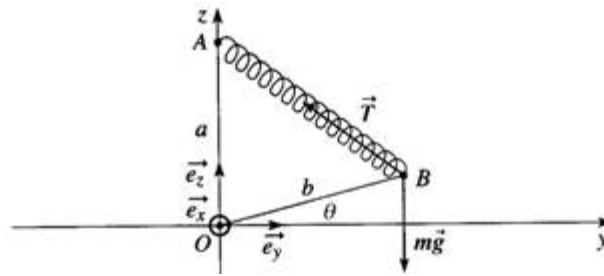
- 1) Exprimer la longueur $l = BM$ en fonction de a et θ .
- 2) Exprimer le moment de la tension du ressort par rapport à O en fonction de k, a et θ .
- 3) Déterminer à partir du théorème du moment cinétique l'équation du mouvement en fonction de R, g, k, l_0, m, θ et ses dérivées.
- 4) Le point P se trouve en l'équilibre pour $\theta = \theta_e$. Justifier que le moment résultant des forces appliquées sur M est nul à l'équilibre. Calculer les positions d'équilibre si $k = \frac{2mg}{a}$.
- 5) Pour étudier les petits mouvements autour de chacune des positions d'équilibre θ_{eq} , on pose $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$. Établir l'équation différentielle linéaire en ε de ces petits mouvements. Conclure quant à la stabilité des positions d'équilibre.


Exercice 3 : Gravimètre à ressort


Ref. 0125

- ✓ Oscillateur non harmonique
- ✓ Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre

Un gravimètre à ressort est constitué d'une tige OB de masse négligeable pouvant tourner autour d'un axe horizontal Ox et supportant en B une masse ponctuelle m . Sous l'action du ressort AB , de raideur k et de longueur à vide l_0 , la tige est horizontale à l'équilibre. On pose $OA = a, OB = b, AB = l$ et θ l'inclinaison de la tige OB par rapport à l'axe Oy .



- 1) Exprimer la longueur l_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de a, m, g, k et l_0 . A quelle condition cet équilibre existe-t-il ?
- 2) Déterminer la période T_0 des petites oscillations de ce pendule.

Exercice 4 : Atome de Bohr ♥

★★★

Ref. 0126

- ✓ Interaction coulombienne
- ✓ Quantification de l'énergie

En 1913, le physicien danois Niels Bohr (1885-1962) imagine un modèle « planétaire » de l'atome afin d'expliquer les raies émises par des atomes d'hydrogène excités. Ce modèle, aujourd'hui obsolète, ne permet pas d'expliquer les spectres des autres atomes. Une nouvelle physique fut nécessaire : la physique quantique. Dans le modèle de Bohr, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps ponctuels constitué d'un noyau, le proton de masse m_p et de charge électrique $+e$, et d'un électron M , de masse m_e et de charge $-e$. La masse du proton étant près de 2000 fois celle de l'électron, le proton est considéré comme fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. On note O sa position.

Données:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} ; \varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ SI} ; c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} ; m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

- **Premier postulat de Bohr** : L'électron se déplace uniquement sur certaines orbites circulaires appelées états stationnaires. Ce mouvement peut être décrit par la physique classique. D'après Bohr, l'électron a un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse v autour du proton.
 - 1) Montrer que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimer v^2 en fonction de r, e, m_e et ε_0 .
 - 2) Exprimer l'énergie cinétique $E_c(r)$, l'énergie potentielle d'interaction électrostatique $E_p(r)$ et l'énergie mécanique $E_m(r)$ de l'électron : $E_m(r) = E_c(r) + E_p(r)$.
 - **Deuxième postulat de Bohr**, inspiré par Planck : L'électron accéléré par le proton ne peut pas rayonner de façon continue, mais doit attendre de passer d'une orbite permise n à une autre orbite d'énergie inférieure m pour émettre brutalement un rayonnement sous la forme d'un photon d'énergie : $h\nu_{n \rightarrow m} = E_n - E_m$ (avec $n > m$). E_n et E_m sont les énergies des deux états n et m , h s'appelle la constante de Planck et $\nu_{n \rightarrow m}$ est la fréquence du rayonnement correspondant à la transition $n \rightarrow m$.
 - Pour quantifier l'énergie de l'électron, Bohr ajouta un **troisième postulat ou condition de quantification** : Les seules trajectoires circulaires permises sont celles pour lesquelles le moment cinétique orbital est un multiple entier de la constante de Planck réduite $\hbar$: $L_O(M) = n\hbar$, n entier ≥ 1 .
- 3) Déterminer la vitesse v de l'électron en fonction de r, h, m_e et du nombre quantique principal n .

- 4) Les trajectoires stables de l'électron sont des cercles de rayons r quantifiés par n tel que : $r = n^2 r_0$. Etablir cette expression et calculer (en pm) le rayon de Bohr noté r_0 .
- 5) En déduire l'énergie totale de l'électron quantifiée sous la forme : $E_n = \frac{-E_0}{n^2}$. Calculer E_0 en eV.
- 6) En supposant l'électron dans son état fondamental ($n = 1$), calculer sa vitesse v_0 et l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). L'électron est-il relativiste ?
- 7) On étudie la transition entre deux orbites de nombre quantique principal n et m . Déterminer l'expression littérale de la constante de Rydberg R_H relative à l'atome d'hydrogène et calculer sa valeur sachant que : $\frac{1}{\lambda_{n \rightarrow m}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ (avec $n > m$ et c la vitesse de la lumière dans le vide).
- 8) On apporte à l'atome, dans son état de plus basse énergie, une énergie $\Delta E = 10,2 \text{ eV}$. Dans quel état énergétique se retrouve alors l'atome après avoir reçu cette énergie ?
- 9) Ce phénomène s'accompagne de l'émission d'un photon. Déterminer sa fréquence puis sa longueur d'onde dans le vide. A quel domaine appartient la radiation émise ?

Exercice 5 : Mouvement d'un satellite

★★★

Ref. 0127

- ✓ *Champ de force centrale conservative*
- ✓ *Interaction gravitationnelle*
- ✓ *Satellite géostationnaire*

Un satellite M de masse m est supposé soumis à la seule force d'attraction de la Terre de masse $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et de rayon $R = 6400 \text{ km}$. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On admet que son orbite est circulaire.

On donne la constante de gravitation : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ et la période sidérale de la Terre : $T_{sid} = 86164 \text{ s}$.

- 1) Montrer qu'un satellite artificiel en orbite autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre de la Terre.
- 2) On place M sur 1 orbite circulaire d'altitude z . Exprimer la vitesse de M sur son orbite en fonction de G, M_T, z et R . AN : $z = 600 \text{ km}$.
- 3) Exprimer l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite circulaire.
- 4) Établir l'expression de la période de révolution T du satellite en fonction de G, M_T, r . Quel nom donne-t-on à cette relation ?
- 5) Montrer que le mouvement d'un satellite géostationnaire est circulaire uniforme et que l'orbite se situe dans le plan équatorial. Calculer l'altitude z de d'1 satellite géostationnaire.
- 6) Exprimer l'énergie qu'il faut communiquer à un engin spatial situé à la latitude λ pour le satelliser autour de la Terre à l'altitude z . Où cet apport d'énergie est-il le plus faible ?
- 7) M est lancé dans l'espace à partir d'1 point A situé sur la surface de la Terre. Déterminer la vitesse minimale qui doit être communiquée à M en A pour que M échappe à l'attraction terrestre (vitesse de libération).

Exercice 6 : Gravity ♥

★★★

Ref. 0128

- ✓ *Champ de force centrale conservative*
- ✓ *Interaction gravitationnelle*
- ✓ *Energie potentielle effective*

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS.

Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400 \text{ km}$; G est la constante universelle de gravitation.



- 1) Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_T , sur l'astronaute et son équipement, de masse m . Etablir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
- 2) En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en mouvement circulaire uniforme, établir la troisième loi de Kepler.
- 3) Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de G, m, M_T et r , rayon de l'orbite.
- 4) Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97 \text{ min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H , puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périégée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

- 5) Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.
- 6) Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de G, M_T, m, r_H et r_S .
- 7) Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S . La comparer à v_H . Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périégée en fonction de r_S, T_S et r_H . La comparer à v_S . Calculer les valeurs numériques.
- 8) Quelle est la durée de ce voyage ?

Exercice 7 : Diffusion de Rutherford ♥

★★★

Ref. 0129

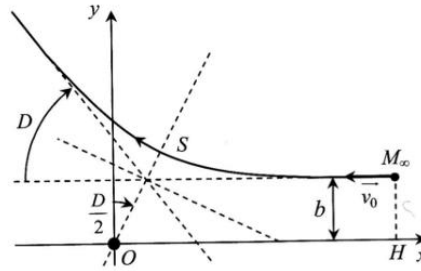
- ✓ *Champ de force centrale conservative*
- ✓ *Interaction coulombienne*
- ✓ *Energie potentielle effective*

Entre 1909 et 1911, E. Rutherford et ses deux étudiants H. Geiger et E. Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α , dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agissait de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées, mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.

Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0 \vec{u}_x$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z . Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O .

Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. On supposera que la particule α n'est soumise qu'à l'interaction coulombienne de la part du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée sur la figure suivante.

Données : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et pour l'or $Z = 79$.



- 1) Exprimer la force subie par la particule α et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.
- 2) Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.
- 3) Montrer que le moment cinétique de la particule $\vec{L}_O$ en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales.
- 4) La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy) , montrer que $\vec{L}_O$ s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot{\theta}$.
- 5) Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$, en explicitant la fonction $E_{p,eff}(r)$. Comment l'appelle-t-on ?
- 6) On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or et $r_{min} = OS$ la distance minimale d'approche. Montrer que : $r_{min} = \frac{K}{mv_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K} \right)^2} \right)$, on exprimera K en fonction de ε_0, Z et e .
- 7) Projeter le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u}_x$ en introduisant v_x la composante de la vitesse selon l'axe Ox et l'angle polaire θ . Ecrire cette équation en fonction de $v_x, v_0, K, b, m, \theta$ et $\dot{\theta}$. Intégrer entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. En déduire que l'angle de déviation D de la particule est donné par $\tan \frac{D}{2} = \frac{K}{mbv_0^2}$.
- 8) Calculer b puis r_{min} pour $D_1 = 60^\circ$ et $D_2 = 180^\circ$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or. On donne $v_0 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$.

Exercice 8 : Chute d'un satellite ♥

★★★

Ref. 0130

- ✓ Champ de force centrale conservative
- ✓ Interaction gravitationnelle

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel S en orbite autour de la Terre dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On note M la masse de la Terre, $m \ll M$ la masse du satellite et G la constante de gravitation universelle.

Données : $M = 6,6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; rayon terrestre $R = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$; $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Dans un premier temps, on néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite, et on suppose l'orbite circulaire de rayon r parcourue à la vitesse angulaire ω .

- 1) Montrer par le théorème du moment cinétique que la quantité $C = r^2 \omega$ est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement est uniforme.
- 2) Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G, M et r . La calculer numériquement pour une orbite d'altitude 1000 km.

3) Exprimer successivement l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite.

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère.

Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Ainsi, un satellite situé sur une orbite à 1000 km d'altitude descend d'environ 2 m par jour. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement quadratique proportionnelle à la masse du satellite, $\vec{f} = -\lambda m v \vec{v}$. Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire demeure quasi-circulaire : les expressions obtenues pour une orbite circulaire demeurent valables, mais le rayon r de l'orbite varie lentement au cours du temps.

4) À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle vérifiée par r .

5) Sans résoudre cette équation, montrer que les frottements font bien descendre le satellite. En déduire un résultat surprenant concernant l'effet des frottements sur la vitesse du satellite.

6) En comparant les énergies, expliquer ce résultat surprenant.

7) Déterminer l'évolution de r en fonction du temps. En déduire l'expression et la valeur numérique du coefficient de frottement.

Exercice 9 : Chute d'un météore ♥

★★★

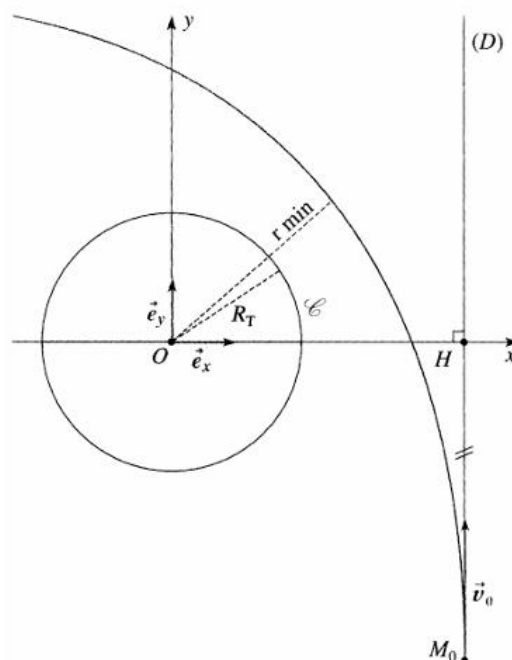
Ref. 0131

- ✓ Théorème du moment cinétique
- ✓ Interaction gravitationnelle
- ✓ Energie potentielle effective

Un météore de masse m , négligeable devant la masse M_T de la Terre, arrive de l'infini avec la vitesse v_0 par rapport à la Terre. Son paramètre d'impact est $OH = b$ (voir figure).

1) Calculer sa distance $r_{\min}$ de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0 , b , M_T et de la constante de gravitation G .

2) Déterminer le paramètre d'impact minimal $b_{\min}$ pour que le météore ne heurte pas la Terre.



Exercice 10 : Comète de Halley



Ref. 0132

- ✓ Champ de force centrale conservative
- ✓ Interaction gravitationnelle
- ✓ Energie potentielle effective

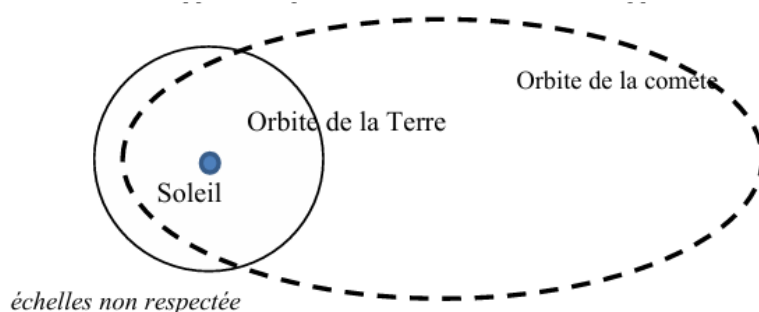
« Comètes que l'on craint à l'égal du tonnerre, Cessez d'épouvanter les peuples de la Terre, Dans une ellipse immense achevez votre cours, Remontez, descendez près de l'astre des jours, Lancez vos feux, volez, et revenant sans cesse, Des mondes épuisés ranimez la vieillesse » Voltaire, 1738

La comète de Halley est la plus connue de toutes les comètes. Son existence a été décrite depuis l'antiquité. L'interaction de cette comète avec d'autres astres (planètes solaires...) est complètement négligeable. La comète suit une trajectoire elliptique de grande excentricité autour du Soleil, dans le référentiel héliocentrique. On note ua l'unité astronomique, correspondant au rayon moyen de l'orbite terrestre, $1 ua = 1,496 \cdot 10^{11} m$. Son excentricité est de 0,967 et sa période est d'environ 76 années terrestres. Sa distance au périhélie est de $0,59 ua$ et sa distance à l'aphélie est de $35,3 ua$.

- 1) La trajectoire de cette comète est décrite par l'équation polaire $r(\theta) = p/(1 + e \cdot \cos(\theta))$ où e est l'excentricité et p est le paramètre de la trajectoire. Déterminer la valeur de p à partir des informations précédentes.
- 2) On donne la constante universelle de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} SI$. Déduire des informations précédentes la masse du Soleil M_S .

On donne l'expression de la surface d'une ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité e : $S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$

- 3) Expliquer comment, on peut déduire des données les caractéristiques orbitales suivantes : vitesse au périhélie $v_p = 54,5 km \cdot s^{-1}$; vitesse à l'aphélie $v_a = 911 m \cdot s^{-1}$.
- 4) On veut déterminer la durée de visibilité de la comète depuis la Terre. On définit cette durée comme l'intervalle de temps pendant lequel la trajectoire de la comète est située à l'intérieur de l'orbite terrestre. Les orbites de la Terre et de la comète sont supposées coplanaires. L'orbite terrestre est supposée circulaire, de rayon $r_T = 1 ua$.



- a) Déterminer l'expression littérale des valeurs θ_0 et $-\theta_0$ d'angle polaire délimitant la partie de trajectoire correspondant au problème. Calculer numériquement θ_0 .
- b) Exprimer en fonction des données la constante des aires $C = r^2 \cdot d\theta/dt$. En exploitant cette relation, établir que la durée de visibilité est donnée par l'intégrale : $\Delta t = \tau \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta$ où l'on identifiera τ .
- c) On donne $\int_0^{\theta_0} \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1}{6} \tan^3\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$. Evaluer la durée de visibilité.

Exercice 11 : Erreur de manœuvre lors d'une satellisation

★★★

Ref. 0133

- ✓ *Champ de force centrale conservative*
- ✓ *Interaction gravitationnelle*

On veut placer sur une orbite circulaire de rayon R autour de la Terre, de masse M_T , un satellite de masse m .

- 1) Quelle est la vitesse v_0 à communiquer au satellite, l'énergie mécanique correspondante et la période du mouvement circulaire T_0 ?

À la suite d'une erreur lors de la satellisation, la vitesse du satellite a bien la bonne direction, mais sa norme v'_0 est différente de v_0 : $v'_0 \neq v_0$.

- 2) Exprimer l'énergie mécanique en fonction de m , v'_0 et v_0 .
- 3) Discuter de la nature de la trajectoire en fonction de $\frac{v'_0}{v_0}$.
- 4) L'erreur commise est faible : on pose $v'_0 = v_0 + \Delta v$. Déterminer les caractéristiques de la trajectoire (demi grand axe a , r_{min} , r_{max} , la période T) en fonction de R , v_0 et de $\frac{v'_0}{v_0}$, puis en fonction de v_0 , Δv , R et T_0 .

On considère maintenant un autre type d'erreur lors de la satellisation, la vitesse du satellite a bien la bonne norme v_0 , mais pas la bonne direction. Soit α l'angle entre les deux vecteurs vitesse $\vec{v}'_0$ et $\vec{v}_0$.

- 5) Quelle est la nature de la trajectoire ?
- 6) En donner les caractéristiques.

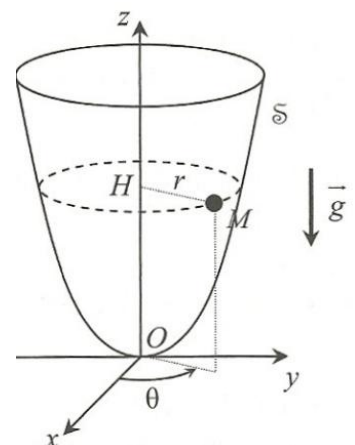
Exercice 12 : Bille dans cuvette parabolique

★★★

Ref. 0134

- ✓ *Théorème du moment cinétique*
- ✓ *Energie potentielle effective*

Une petite bille de masse m peut rouler sur une surface fixe S par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ considéré galiléen. Cette surface est parabolôïde de révolution, d'axe vertical Oz et décrit par l'équation $z = r^2/a$ en coordonnées cylindriques. On modélise la bille comme un point matériel M se déplaçant sans frottements sur la surface : la réaction normale exercée par S sur M est alors contenue dans le plan méridien (OHM).



- 1) Exprimer dans la base cylindrique la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$ et en déduire le moment cinétique de M en fonction des variables r et θ et de leurs dérivées.
- 2) Montrer que la composante du moment cinétique selon Oz se conserve, on notera L_{Oz} cette constante. Exprimer L_{Oz} en fonction de m , r et $\dot{\theta}$.
- 3) Exprimer l'énergie cinétique de M dans $\mathcal{R}$.
- 4) Justifier l'existence d'une énergie potentielle pour M et l'exprimer en fonction de r . On prendra $E_p(0) = 0$.
- 5) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M ?
- 6) Déduire de ce qui précède une intégrale première du mouvement de la forme : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 G(r) + E_{p,eff}(r) = Cte$, $G(r)$ est positif sans dimension et $E_{p,eff}(r)$ est une énergie potentielle effective. Expliciter $G(r)$ et $E_{p,eff}(r)$ en fonction de r , a , L_{Oz} , m et g .

- 7) Représenter le graphe de $E_{p,eff}(r)$.
- 8) Discuter, à l'aide d'un graphe, la nature du mouvement de M . En déduire que la trajectoire de M est nécessairement tracée sur une région de S limitée par 2 cercles, définis à l'aide des constantes du mouvement. Indiquer l'équation à résoudre pour déterminer les rayons de ces 2 cercles (aucune résolution n'est demandée).