



TD 17 – Solide en rotation autour d'un axe fixe

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

- Différencier un solide d'un système déformable
- Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de la vitesse angulaire et la distance à l'axe
- Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Savoir exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté.
- Savoir définir un couple.
- Savoir définir une liaison pivot et justifier son moment
- Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
- Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
- Etablir l'équivalence entre le TMC scalaire et celui de l'énergie cinétique

J'apprends mon cours : Questions de cours, exercices 1, 3, 4

Questions de cours

- Q1.** Énoncer le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Q2.** Établir l'équation du mouvement du pendule pesant et du pendule de torsion.
- Q3.** Établir le théorème de la puissance cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Q4.** Expliquer comment évolue la durée du jour pendant une ère de glaciation. On considèrera que la glace se forme majoritairement aux pôles.

Exercices

Exercice 1 : Equilibre d'un pont levis



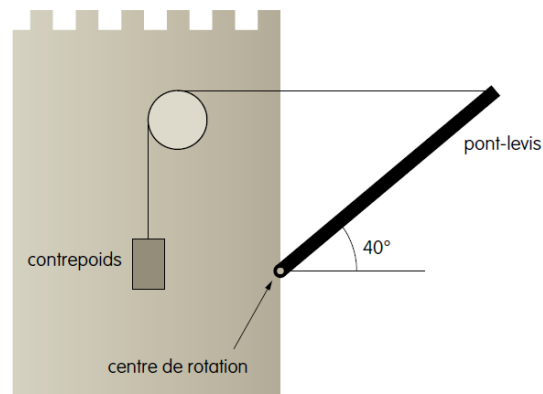
Ref. 0135

- ✓ *Moment d'une force par rapport à un axe*
- ✓ *Solide en équilibre*

Un pont-levis homogène pèse $m = 2$ tonnes et mesure $L = 5$ m de long.

Il est maintenu en l'air grâce à une corde et un contrepoids. La poulie, supposée idéale, transmet les tensions.

La liaison pivot est supposée parfaite.



Le pont, en équilibre, forme un angle de 40° par rapport à l'horizontale. Quelle est la masse M du contrepois ?

Exercice 2 : Effondrement du Soleil

★★★

Ref. 0136

- ✓ Moment d'une force par rapport à un axe
- ✓ Conservation du moment cinétique

On pense qu'à la fin de sa « vie » actuelle, dans environ cinq milliards d'années, le Soleil s'effondrera en une Naine Blanche, un astre à très forte densité concentrant la masse du Soleil sur une boule de rayon équivalent au rayon terrestre.

- 1) Justifier que le moment cinétique scalaire du Soleil par rapport à son axe de rotation reste constant au cours de cet effondrement.
- 2) Evaluer les moments cinétiques scalaires du Soleil, ainsi que de la Naine Blanche, en fonction de leur masse commune $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, de leurs périodes de rotation $T_S \approx 1 \text{ mois}$ et T_{NB} , et des rayons solaire $R_S = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ et terrestre $R_T = 6400 \text{ km}$.
Le moment d'inertie d'une boule homogène de masse m et de rayon R est $J_{Oz} = 0.4 mR^2$
- 3) En déduire la période de rotation de la Naine Blanche.

Exercice 3 : Etude d'une roue de vélo

★★★

Ref. 0137

- ✓ Moment d'inertie d'un solide
- ✓ Moment d'une force par rapport à un axe

On considère une roue de bicyclette de rayon R et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par un frein à étrier. Le frein exerce sur la jante une force tangente et d'intensité F , que l'on considèrera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu, fixe, noté (Δ) . On suppose que la liaison pivot est parfaite et on néglige tous les frottements.

- 1) Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre vide ?
- 2) On donne les moments d'inertie associés aux deux modèles : $J_\Delta = mR^2/2$ et $J_\Delta = mR^2$. Attribuer à chaque modèle.
- 3) Quel est le moment résultant sur l'axe (Δ) ? On justifiera avec soin en précisant les moments éventuellement nuls avec la raison de cette nullité.
- 4) En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ autour de l'axe.
- 5) Déterminer alors les expressions de $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ si à $t = 0$, on a $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \omega_0$.

- 6) Déterminer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour. On cherchera dans un premier temps à quelle condition la roue s'arrête, et quel angle la roue aura-t-elle parcouru. On donne, pour l'application numérique, $R = 33 \text{ cm}$, $m = 1.6 \text{ kg}$ et $\omega_0 = 17 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 4 : Métronome

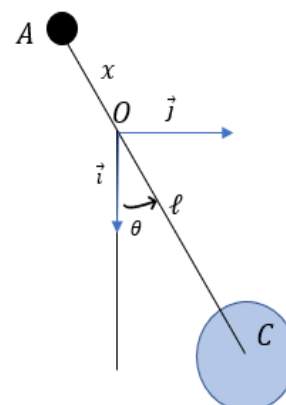
★★★

Ref. 0138

- ✓ Moment d'une force par rapport à un axe
- ✓ Pendule pesant
- ✓ Oscillations

On étudie un métronome constitué :

- D'une tige rigide de longueur $L = 20 \text{ cm}$ de masse négligeable en rotation d'angle θ autour de l'axe Oz . La tige est tenue en O par une liaison pivot supposée parfaite
- D'un disque homogène de centre C , tel que $OC = l = 2 \text{ cm}$, de rayon $R = 1.5 \text{ cm}$ et de masse $M = 200 \text{ g}$.
- D'un curseur (dimensions négligeables) et de masse $m = 20 \text{ g}$ et pouvant être déplacé sur la tige selon le rythme souhaité. Soit x la distance du curseur à O , cette distance ne pouvant dépasser 15 cm .



On associe au bâti fixe le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne le moment d'inertie du métronome par rapport à l'axe de rotation Oz , orienté selon le vecteur \vec{k} : $J = (mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + Ml^2)$.

- 1) Commenter l'influence de x sur la valeur de J .
- 2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .
- 3) Dans l'hypothèse des petites oscillations, donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations.
- 4) Dans une partition musicale le rythme est donné en battements par minute, c'est à dire le nombre de demi-aller-retour du métronome. On a ainsi le mouvement andante de 100 battements par minute. A quelle période du métronome correspondent ce mouvement ?
- 5) Comment faut-il modifier x pour diminuer le nombre de battements par minute ?

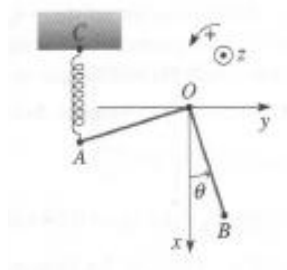
Exercice 5 : Oscillations d'une tige

★★★

Ref. 0139

- ✓ Moment d'une force par rapport à un axe
- ✓ Oscillations

Un solide homogène de masse M filiforme a la forme d'un coude AOB ($OA = OB = 2a$, angle $AOB = 90^\circ$). Ce solide peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Oz . Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k , est accroché à l'extrémité en A l'autre extrémité C étant maintenue fixe. A l'équilibre OA est horizontal. Le moment d'inertie du solide est $4M \frac{a^2}{3}$.



- 1) Exprimer la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, a et k .
- 2) On étudie les petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre. En supposant que la force élastique reste verticale pendant le mouvement, exprimer la période des oscillations.

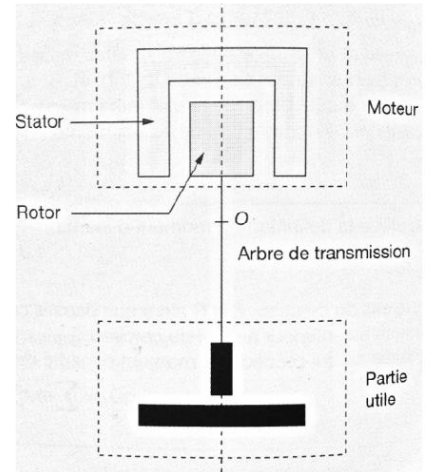
Exercice 6 : Machine tournante et volant d'inertie

★★★
Ref. 0140

- ✓ Couple résistif
- ✓ Régime sinusoïdal forcé

On étudie la phase de mise en rotation du rotor d'une machine tournante dans le référentiel terrestre. On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe de rotation Δ .

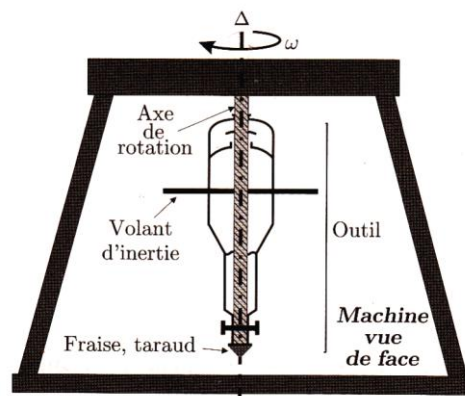
Le rotor, de moment d'inertie $J = 10,7 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ par rapport à Δ , est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant I traversant le stator (partie fixe) du moteur : $C_m = kI$ avec $k = 22 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ et $I = 0,1 \text{ A}$.



- 1) On néglige pour commencer tous les frottements.
 - a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ du rotor.
 - b) La résoudre en supposant qu'au départ le rotor est immobile.
 - c) Déterminer et calculer le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse angulaire $\omega_0 = 1800 \text{ rad/s}$.
- 2) Le rotor est en réalité soumis à un couple de frottements solides $C_s = 400 \mu\text{N} \cdot \text{m}$ et à un couple de frottement fluides $C_f = \lambda\omega$ ($\lambda = 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$).
 - a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$.
 - b) Quelle est la vitesse angulaire atteinte par le moteur en régime permanent ?
 - c) Déterminer le temps T mis pour atteindre le régime permanent à 5 %.

Influence d'une vibration : On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la fréquence $f = \Omega/2\pi$ avec un taux de modulation η : $C = C_m (1 + \eta \cos(\Omega t))$.

- 3) A partir de l'équation différentielle vérifiée par ω , établir celle vérifiée par la fonction $\varepsilon(t)$ telle que : $\omega(t) = \omega_0 (1 + \varepsilon(t))$
- 4) Justifier qu'au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme : $\varepsilon(t) = a \cos(\Omega t + \varphi)$.
- 5) Déterminer les constantes a et φ en fonction Ω, ω_0 et des données.
- 6) **Rôle d'un volant d'inertie :** A l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie. Quel est l'inconvénient ?



Exercice 7 : Chute d'un arbre

★★★
Ref. 0141

✓ *Moment d'une force par rapport à un axe*

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $J = \frac{1}{3}mL^2$.

1) Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.

2) Montrer que sa vitesse angulaire s'écrit : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$

3) Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. On donne pour $\theta_0 = 5^\circ$:

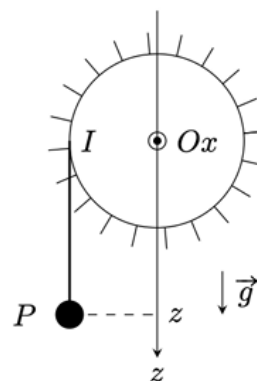
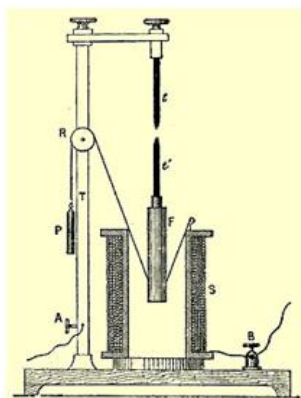
$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5.1$$

Exercice 8 : Régulateur d'Archereau-Foucault

★★★
Ref. 0142

✓ *Théorème du moment cinétique scalaire*
✓ *Théorème de la résultante cinétique*

Un régulateur d'Archereau-Foucault est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique. On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil inextensible de masse négligeable devant m . Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_{Ox} . La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.



- 1) Justifier que $\dot{z} = R\omega$.
- 2) Montrer que la force \vec{T} de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par $\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{u}_z$.
- 3) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire de rotation ω .
- 4) Résoudre cette équation pour $\omega(0) = \omega_0$. En déduire l'intérêt du dispositif.

Exercice 9 : Chute d'une tartine

★★★
Ref. 0143

- ✓ Théorème du moment cinétique scalaire
- ✓ Théorème de la résultante cinétique
- ✓ Théorème énergétique

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitement sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut. La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Il observe la répétitivité du phénomène et le modélise.

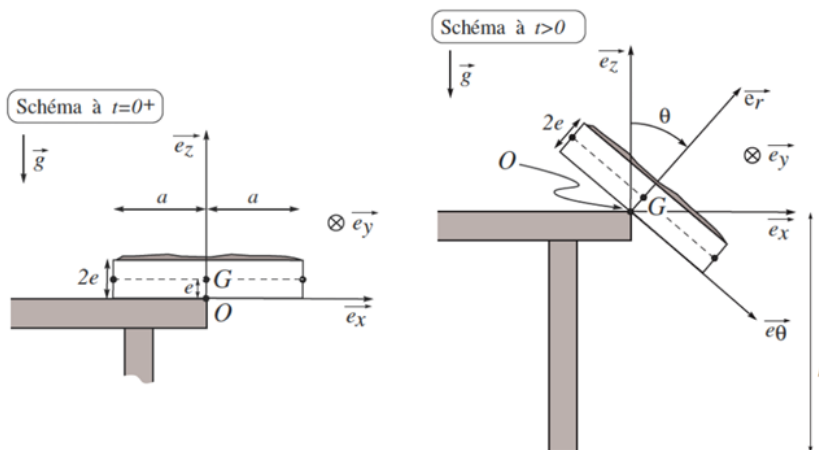
Une tartine rectangulaire de longueur $2a$, de largeur b et d'épaisseur $2e$, de masse m uniformément répartie, est placée au bord d'une table de hauteur h .

L'axe Ox est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe Oz est vertical ascendant et l'axe Oy ; les petits côtés de la tartine sont parallèles à Oy .

À l'instant initial, la tartine est horizontale et repose de moitié sur la table, sa vitesse est nulle. On considère que la chute de la tartine est provoquée par un léger déséquilibre. La tartine amorce alors une rotation sans glissement autour de l'arête Oz du bord de la table. À l'instant t , la tartine est repérée par l'angle θ . La vitesse angulaire est notée $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Oz est : $J_{Oz} = m(a^2 + 4e^2)/3$.

L'action de la table est modélisée par une force $\vec{R} = T\vec{e}_\theta + N\vec{e}_r$, appliquée en O . On note f le coefficient de frottement entre la table et la tartine.



Etude du pivotement de la tartine.

- 1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ .
- 2) Montrer que : $\omega^2 = \frac{6g\eta}{a(1+4\eta^2)}(1 - \cos \theta) = \omega_0^2(1 - \cos \theta)$ où $\eta = e/a$
- 3) Exprimer le vecteur accélération de G dans la base cylindrique.
- 4) Appliquer le théorème de la résultante cinétique, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, en projection sur la base mobile cylindrique ; on notera g l'intensité de l'accélération de la pesanteur.
- 5) Exprimer les composantes de T et N en fonction de m, g, η et θ .
- 6) La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. En négligeant η , estimer f .

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine.

A partir du moment où la tartine commence à glisser, elle perd très vite le contact avec la table mais conserve quasiment la même orientation et la même vitesse angulaire qu'au début de cette phase très brève de glissement. On suppose donc la tartine est en chute libre dès que $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$ à un instant pris comme origine des temps. On néglige les frottements de l'air. On suppose, bien entendu, que le mouvement reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table.

- 7) Exprimer la vitesse angulaire initiale, que l'on notera Ω . On montre que celle-ci reste constante pendant la chute. Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ ?
- 8) On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable. Quels sont les angles limites θ_1 et θ_2 tels que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol ?
- 9) En négligeant toutes les dimensions de la tartine devant la hauteur de la table h , on modélise la tartine par un point matériel de masse m . On néglige également la vitesse initiale de la chute.
On prendra $a = 4 \text{ cm}$, $h = 75 \text{ cm}$, $e = 0.4 \text{ cm}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 - a) Estimer la durée de la chute τ .
 - b) Calculer l'angle correspondant. Conclure.