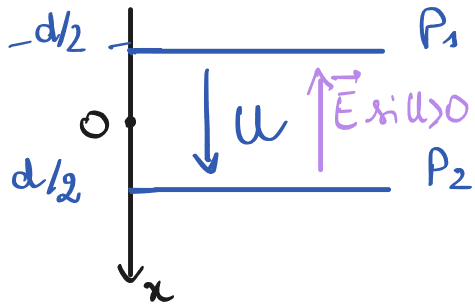
Correction TD 14

Exercice 1 :

1) $\vec{F} = -e\vec{E}$



$\vec{E} = E\,\vec{u_x}$

$$V_{P_2} - V_{P_1} = U = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$U = -\int_{-d/2}^{d/2} \underbrace{E}_{= Cte}\,\vec{u_x} \cdot dx\,\vec{u_x}$$

$U = -Ed \rightarrow \vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{u_x}$ $\qquad \vec{F} = \frac{eU}{d}\vec{u_x}$

2) Système : $\{e^-\}$ Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : force électrique (poids négligé)

PFD : $m\vec{a} = \frac{eU}{d}\vec{u_x}$

$\vec{v_0}$ selon $\vec{u_z}$ et $\vec{F}$ selon $\vec{u_x}$ $\Rightarrow$ le mouvement appartient au plan $(\vec{u_x}, \vec{u_z})$

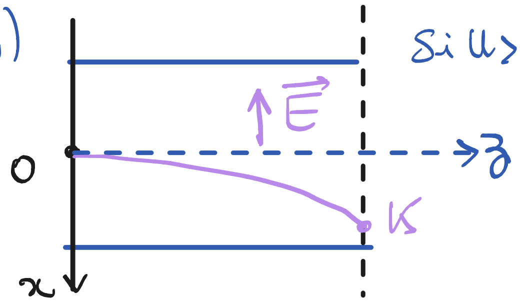
Dans $(\vec{u_x}, \vec{u_z})$: $\begin{vmatrix} m\ddot{x} = \frac{eU}{d} \\ m\ddot{z} = 0 \end{vmatrix}$ $\rightarrow \ddot{x} = \frac{eU}{md}$ (1) $\quad \rightarrow \ddot{z} = 0$ (2)

(1) $\dot{x} = \frac{eU}{md}t$ ($\dot{x}(0) = 0$ donc Cte $= 0$) $\qquad x(t) = \frac{eU}{2md}t^2$ ($x(0) = 0$ donc Cte $= 0$)

(2) $\dot{z} = $ Cte $= v_0$ $\qquad z(t) = v_0 t$ ($z(0) = 0$ donc Cte $= 0$)

Equation de la trajectoire : $x(z) = \frac{eU}{2mdv_0^2}z^2$

3)



Si $U > 0$, $z_K = D$ $\qquad x_K = \frac{eU}{2mdv_0^2}D^2$

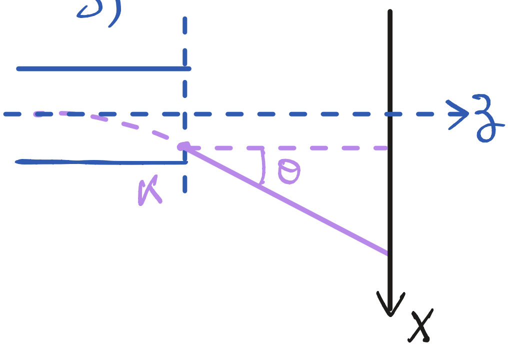
$\dot{x}_K = \dfrac{eU}{md} t_K$ avec $t_K = \dfrac{D}{v_0}$

$\dot{z}_K = v_0$

$$\vec{v}_K = \frac{eUD}{m d v_0}\vec{u}_x + v_0 \vec{u}_z$$

4) Hors des plaques : $m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{Cte}$ MRU

5)



$$\tan\theta = \frac{\dot{x}_K}{\dot{z}_K} = \frac{eUD}{m d v_0^2} = \frac{X_p - x_K}{L}$$

$$X_p = x_K + L\,\frac{eUD}{m d v_0^2}$$

$$X_p = \frac{eU}{2 m d v_0^2} D^2 + L\,\frac{eUD}{m d v_0^2} \qquad X_p = \frac{eUD}{m d v_0^2}\left(\frac{D}{2} + L\right)$$

Exercice 2 :

1) 2 isotopes sont 2 atomes correspondant à un même élément (m̂ nb de protons Z) mais qui se différencie par leur nombre de neutrons.

2) 92 protons

^{235}U : nombre de neutrons = 235 − 92 = 143 neutrons

^{238}U : nombre de neutrons = 238 − 92 = 146 neutrons

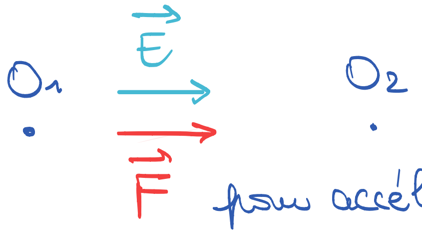
3) $M = x M_{235} + y M_{238}$

. $x + y = 1$

$$M = x M_{235} + (1-x) M_{238} \rightarrow x = \frac{M - M_{238}}{M_{235} - M_{238}} = 0{,}73\%$$

$y = 1 - x = 99{,}27\%$

^{235}U : 0,73% ^{238}U : 99,27%

4) 

pour accélérer une charge > 0 ⇒ sens de $\vec{E}$

$\vec{E}$ descend les potentiels ⇒ $V_{G_2} < V_{G_1}$

Donc $V_{G_1} - V_{G_2} > 0$

5) Système : {ion}   Réf : terrestre supposé galiléen

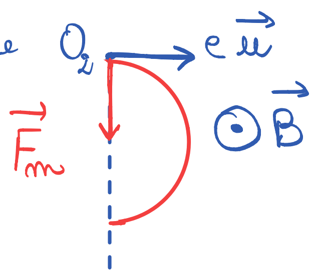
BdF entre O_1 et O_2 : force électrique

TEM entre O_1 et O_2 : $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + qV_{G_2} = \frac{1}{2} m_1 \times 0^2 + qV_{G_1} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2Ue}{m_1}}$

De même : $v_2 = \sqrt{\frac{2Ue}{m_2}}$

6) $\underbrace{\Delta E_c}_{15\,keV} = -\Delta E_p = eU$ 1 eV = e J ⇒ U = 15 kV

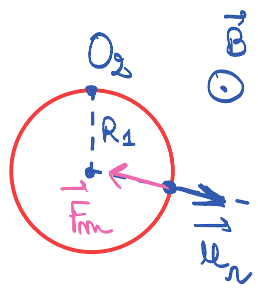
AN : $v_1 = 111$ km.s^{-1} $v_2 = 110$ km.s^{-1}

7) Trajectoire souhaitée 

$\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$

8) $\vec{v} \perp \vec{B}$: la trajectoire est circulaire

$\vec{F}_m$ ne travaille pas car $\perp \vec{v}$ donc $\|\vec{v}_1\| = Cte$



PFD selon $\vec{u}_n$ $-m_1 \frac{v_1^2}{R_1} = -e v_1 B \rightarrow R_1 = \frac{m_1 v_1}{eB}$

De même : $R_2 = \frac{m_2 v_2}{eB}$

9) $D = 2R_1 = 2\,\dfrac{m_1 u_1}{eB} \rightarrow$ $B = \dfrac{m_1 u_1}{e}$ $B = 0{,}576\,T$

10) $R_2 > R_1$ il y a séparation isotopique si $2R_2 > D + \dfrac{L'}{2}$.

$2R_2 = 946\,mm$ $D + \dfrac{L'}{2} = 942\,mm$ $\rightarrow$ il y a séparation isotopique

11) $100\,mA \rightarrow 100 \times 10^{-3}\,C/s \iff \dfrac{100 \times 10^{-3}}{e}$ ion/s

Pendant 1 an : $\underbrace{\dfrac{100 \times 10^{-3}}{e} \times 365 \times 24 \times 3600}_{\text{nb d'ions en 1 an}} \times \underbrace{\dfrac{M_{235}}{N_A}}_{\text{masse d'1 ion } ^{235}U^{+}} \times \dfrac{0{,}7}{100} = 54\,g$

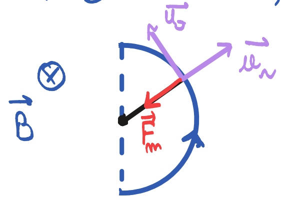
Exercice 3 :

1) Système : {particule chargée} Réf : terrestre supposé galiléen

Bdf dans un dee : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (on néglige le poids)

TEC : $\Delta E_c = W(\vec{F}_m) = 0$ car $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ $\Rightarrow v = Cte$ mouvement uniforme

2) Dans un dee, $\vec{v} \perp \vec{B}$: le mouvement est circulaire.



PFD selon $\vec{u}_N$: $-m\dfrac{v^2}{R} = -evB$ $R = \dfrac{mv}{eB}$ $\Delta t = \dfrac{\pi R}{v} = \dfrac{\pi m}{eB}$ indépendant de v

3) la tension doit changer de signe tous les Δt (on néglige le temps passé entre les dees) : $\Delta t = \dfrac{T}{2}$

$f = \dfrac{1}{2\Delta t}$ $f = 1{,}54\,MHz$

4) 1 tour correspond à 2 passages dans la zone d'accélération.

A chaque passage $\Delta E_c = eU$, donc pour N passages $\Delta E_{c_N} = NeU = \dfrac{1}{2} m v_N^2$

Nombre de tours : $n = \dfrac{N}{2}$ $n = \dfrac{m v_N^2}{4eU} = 234$

Durée totale : $\Delta t_{tot} = n\,T$ $\Delta t_{tot} = 151\,\mu s$

5) $R_N = \dfrac{m v_N}{eB} = 1{,}55\,m$

Exercice 4 :

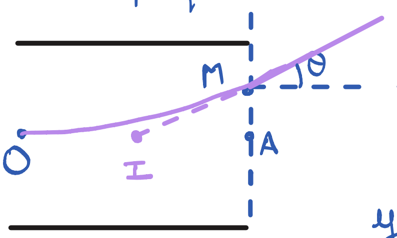
Système : $\{e^-\}$ **Réf** : terrestre supposé galiléen

1ère expérience : **BdF** : $\vec{F_e} = -e\vec{E}$

PFD $m\vec{a} = -e\vec{E}$

Dans $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$:
$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = Cte = v_0 \rightarrow x = v_0 t \\ m\ddot{y} = eE \rightarrow \dot{y} = \dfrac{eE}{m} t \rightarrow y = \dfrac{eE}{m}\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \Bigg\} \; y(x) = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

Hors des plaques : MRU



$$\tan\theta = \frac{\dot{y}(M)}{\dot{x}(M)} = \frac{eEt_M}{mv_0} \qquad t_M = \frac{a}{v_0} \qquad \tan\theta = \frac{eEa}{mv_0^2}$$

$$y_P = y_M + \tan\theta\,(AH) \qquad y_M = \frac{eE}{2mv_0^2}a^2$$

$$\frac{y_M}{IA} = \tan\theta \qquad IA = \frac{a}{2} \qquad \text{donc } AH = D - \frac{a}{2}$$

$$y_P = \frac{eE}{2mv_0^2}a^2 + \frac{eEa}{mv_0^2}\left(D - \frac{a}{2}\right) \qquad y_P = \frac{eEaD}{mv_0^2}$$

2° expérience : $\vec{F_m}$ et $\vec{F_e}$ se compensent donc $\vec{v} = \vec{v_0}$ et

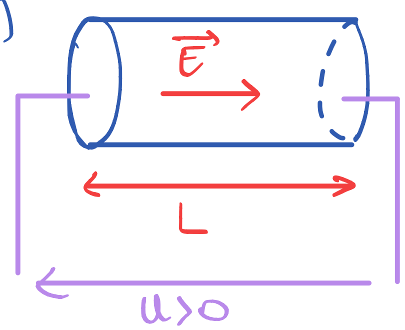
$$eE = eBv_0 \qquad E = Bv_0$$

$$Y = \frac{eEaD}{mE^2}B^2 \qquad \frac{e}{m} = \frac{YE}{aDB^2}$$

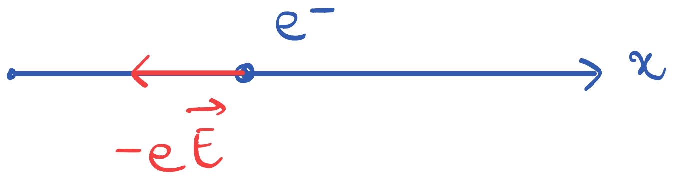
Exercice 5 :

1) $n = n_{Cu} = \dfrac{\mu}{M_{Cu}} \times N_a$ $\qquad n = 8{,}48 \cdot 10^{28}\ e^-/m^3$

2)



$$\|\vec{E}\| = \frac{U}{L} = 5\,V.m^{-1}$$

3) 

On suppose $\vec{E} = \|\vec{E}\| \vec{u}_x$

Système : $\{e^-\}$ Réf : terrestre supposé galiléen

Bdf : $\cdot\ \vec{F_e} = -e\vec{E}$

$\cdot\ \vec{f} = -\lambda \vec{v}$

PFD : $m\vec{a} = -e\vec{E} - \lambda \vec{v}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda \vec{v} = -e\vec{E}$$ on pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$

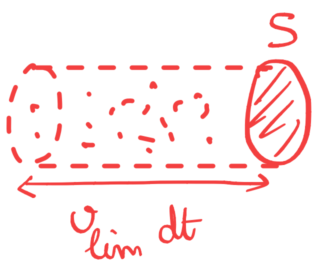
$$\hookrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\left(\vec{v}_0 + \frac{e}{\lambda}\vec{E}\right) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{\text{transitoire car } \to 0 \text{ quand } t \to \infty} - \frac{e\vec{E}}{\lambda}$$

$\vec{v}$ tend alors vers $\vec{v}_{lim} = -\frac{e\vec{E}}{\lambda}$

$\|\vec{v}_{lim}\| = 3{,}6 \times 10^{-4}\ m.s^{-1}$

4) $I = \frac{\delta q}{dt}$ pendant dt : les e^- traversant 1 section S sont ceux situés dans un cylindre de section S et de longueur $v_{lim}\,dt$.



$I = n \times S \times v_{lim}\, e$ $S = \pi r^2$

$I = 3{,}8 A$

5) $I = n e \pi r^2 \frac{eU}{\lambda L} = \frac{U}{R}$ $R = \frac{\lambda L}{n e^2 \pi r^2} = 0{,}26\ \Omega$

6) $R = \frac{\rho L}{S} \to \rho = \frac{\lambda}{ne^2} = 1{,}0 \times 10^{-6}\ \Omega.m^{-1}$

Exercice 6

1) Système : $\{e^-\}$ Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : $\vec{F} = -k\vec{OM}$ (on néglige le poids)

PFD : $m\vec{a} = -k\vec{OM}$

Dans $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$: $\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -kx \\ -ky \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\rightarrow$ $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ $\left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$
$y(t) = Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$ } trajectoire elliptique

ω_0 : pulsation propre des oscillations découplées sur x et y.

3)
a) On rajoute la force $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\vec{F}_m = \begin{vmatrix} -e\dot{x} \\ -e\dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e\dot{y}B \\ e\dot{x}B \\ 0 \end{vmatrix}$$

$m\ddot{x} = -kx - e\dot{y}B$ (1)

$m\ddot{y} = -ky + e\dot{x}B$ (2)

b) (1) + i (2) : $m(\ddot{x} + i\ddot{y}) = -k(x + iy) \underbrace{- e\dot{y}B + ie\dot{x}B}_{ieB(\dot{x}+i\dot{y})}$

$m\ddot{u} - ieB\dot{u} + ku = 0$

c) $\Delta = -e^2B^2 - 4km < 0 \rightarrow$ 2 solutions $\mathbb{C}$

$$X_{1/2} = \frac{ieB \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2m} = i\frac{eB}{2m} \pm i\sqrt{\frac{e^2B^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}$$

$X_1 = i\left(\frac{eB}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B^2}{4m^2}}\right)$ $\quad$ $X_2 = i\left(\frac{eB}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B^2}{4m^2}}\right)$

⚠ < 0

Solution : $u = A e^{X_1 t} + B e^{X_2 t} = A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_2 t}$

$$u = \underbrace{A\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t)}_{x(t)} + i\underbrace{\left(A\sin(\omega_1 t) - B\sin(\omega_2 t)\right)}_{y(t)}$$

avec

$$\omega_1 = |X_1| = \frac{eB}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B^2}{4m^2}}$$

$$\omega_2 = |X_2| = -\frac{eB}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2B^2}{4m^2}}$$

Exercice 7 :

Système : $\{e^-\}$ Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : force de Lorentz (on néglige le poids)

1) PFD : $m\vec{a} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge B$

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ qE \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ qB\dot{z} \\ qE - q\dot{y}B \end{vmatrix}$$

$\ddot{x} = 0$ $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = 0$ et $x = 0$

Le mouvement est plan.

2) • $\ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z}$ on pose $\omega = \frac{qB}{m}$

$\dot{y} = \frac{qB}{m} z + Cte$ $\dot{y}(0) = v_0$ et $z(0) = 0 \rightarrow \dot{y} = \frac{qB}{m} z + v_0$

• $\ddot{z} = \frac{q}{m} E - q\frac{B}{m}\dot{y} = \frac{q}{m} E - \omega^2 z - \omega v_0$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{qE}{m} - \omega v_0$$

$$z = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{qE}{m} - \omega v_0\right)$$

$z(0) = 0 \qquad A\cos\varphi + \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_0\right) = 0$

$\dot{z}(0) = 0 \qquad -A\omega \sin\varphi = 0 \qquad \varphi = 0$ par exemple

$$z(t) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)(1 - \cos(\omega t))$$

$$\dot{y} = \omega z + v_0 \rightarrow y(t) = \left(\frac{E}{B} - v_0\right)t - \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)\sin(\omega t) + v_0 t + Cte$$

$$= \frac{E}{B}t - \left(\frac{E}{B} - v_0\right)\sin(\omega t) + Cte$$

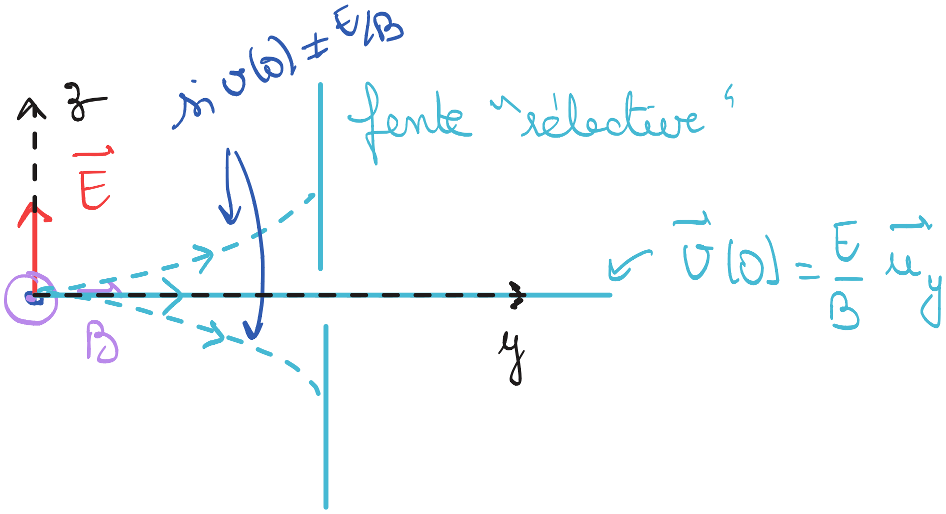
$y(0) = v_0 \Rightarrow Cte = 0$

$$y(t) = \frac{E}{B}t - \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)\sin(\omega t)$$

5) On veut une trajectoire rectiligne : comme $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_y$ la trajectoire est selon l'axe Oy.

à $t = 0$ il faut $qE - q\dot{y}(0)B = 0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{E}{B}$

Remarque : dans ce cas $z = Cte = 0 \quad \dot{z} = 0 \rightarrow \vec{F} = \vec{0} \rightarrow$ MRU



$v_0 = \frac{E}{B}$ se retrouve aussi en imposant $z = 0$.