

Devoir surveillé n° 7

Durée : 3 heures

- ✓ *La calculatrice est autorisée*
- ✓ *Les réponses doivent être **justifiées**.*
- ✓ *Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.*
- ✓ **Critères de présentation** : *un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.*

Critère	Indicateur
<i>Lisibilité de l'écriture</i>	<i>L'écriture ne ralentit pas la lecture.</i>
<i>Respect de la langue</i>	<i>La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.</i>
<i>Clarté de l'expression</i>	<i>Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1^{ère} lecture</i>
<i>Propreté de la copie</i>	<i>La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.</i>
<i>Mise en évidence des résultats</i>	<i>Résultats encadrés ou soulignés</i>
<i>Identification des questions et pagination</i>	<i>Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.</i>

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Masse de l'électron : $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Rayon de la Terre : $R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$

Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Ordre de grandeur du champ magnétique à la surface de la Terre : $5 \times 10^{-5} \text{ T}$

Exercice 1 : Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Le Soleil expulse près de 10^9 kg par seconde de matière sous forme de plasma constitué en grande majorité d'hydrogène ionisé, d'hélium ionisé et d'électrons. Ces particules constituent le vent solaire et se déplacent en moyenne à 450 km/s .

La magnétosphère est la dernière enveloppe d'une planète, avant le milieu interplanétaire. Elle est caractéristique des planètes qui ont un champ magnétique propre. Puisque ces particules sont chargées, leurs trajectoires initialement rectilignes sont déviées par le champ magnétique de la planète ce qui évite à celle-ci d'être trop bombardée par ces particules très énergétiques.

Le contournement du vent solaire donne à la magnétosphère sa forme caractéristique, avec une queue allongée dans la direction opposée au Soleil et deux immenses « lobes » presque totalement vides (**Figure 1**).

La magnétosphère et son intense activité électromagnétique ne sont pas visibles du sol sauf dans les régions polaires où elles peuvent se manifester de façon très spectaculaire. Le champ magnétique terrestre est à peu près celui d'un « aimant droit » dont l'axe passe dans les régions polaires. Les lignes de champ magnétique qui viennent des régions éloignées de la Terre plongent donc dans l'atmosphère dans les régions polaires. Comme dans la magnétosphère le plasma est peu dense, il n'y a pas de collisions et les particules chargées restent liées aux lignes de champ.

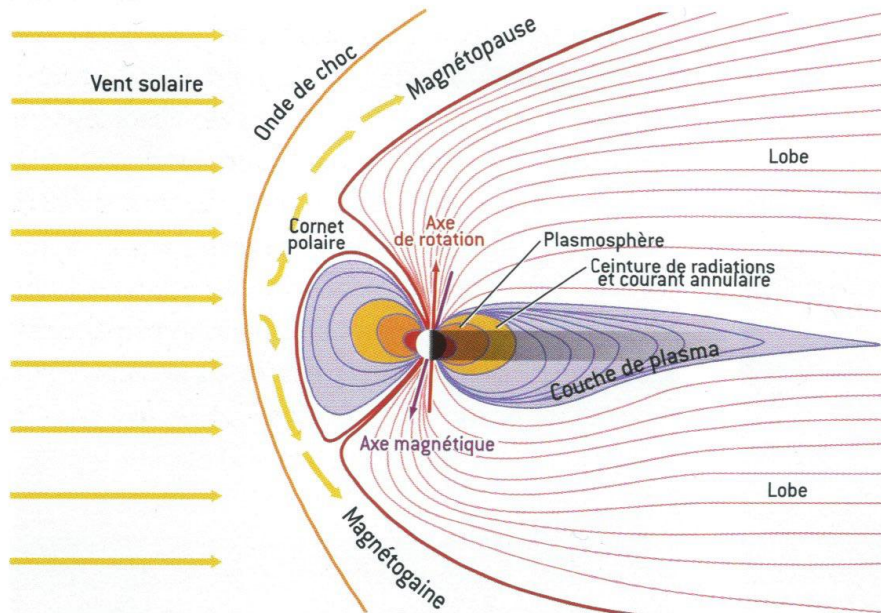


Figure 1

Coupe méridienne de la magnétosphère de la Terre. Le Soleil est loin sur la gauche. Les traits fins symbolisent les lignes de champ magnétique.

Quand une reconfiguration magnétique intervient (ce qu'on appelle un sous-orage magnétique), les particules accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère et produisent des aurores. Dans le même temps, ces électrons accélérés émettent un rayonnement radio dont la longueur d'onde est de l'ordre du kilomètre et qui s'échappe de la magnétosphère par les pôles.



Figure 2

Aurore boréale vue du sol sur la Terre. La Lune, visible à côté de l'aurore, donne une idée de la luminosité (Centre d'étude spatiale des rayonnements ©CNRS Photothèque/V. Génot).

A. Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

- Q1.** Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.
Q2. Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud) ?

B. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

On se propose pour commencer d'étudier la dynamique d'un électron de masse m dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV dans une zone de champ magnétique stationnaire et uniforme.

- Q3.** Dans le référentiel géocentrique (\mathcal{R}) supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$). La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.
Q4. On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale orthogonale au champ magnétique $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x$ ($v_{0x} > 0$).

- Q5.** Montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.
Q6. Mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire de norme $B_0 = 1,7 \cdot 10^{-7} T$.
Q7. Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. En donner ses caractéristiques : coordonnées du centre C , expression du rayon R et de la période de révolution T de l'électron. Evaluer R et T .
Q8. Tracer, avec soin, le cercle dans le plan Oxy , dans le cas d'un électron, puis dans le cas d'un proton. Préciser en particulier les sens de parcours de chaque particule sur le cercle.

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathcal{P} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} e^2 \dot{\beta}^2$. (ϵ_0 en $N^{-1} \cdot m^{-2} \cdot C^2$)

On considère que la puissance rayonnée agit faiblement sur le mouvement de l'électron, c'est-à-dire qu'elle agit sur une durée $\tau \gg \frac{1}{\omega_c}$. On considère alors que les relations précédemment obtenues restent applicables avec un rayon qui varie dans le temps.

- Q9.** Déterminer les valeurs α et β .
Q10. Après avoir exprimé l'énergie cinétique de l'électron E_C en fonction de m , R et ω_c , exprimer la variation de l'énergie cinétique de l'électron dE_C lorsque R varie de dR .
Q11. Etablir l'expression de la fonction $R(t)$ et établir que le temps caractéristique τ s'écrit $\tau = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{B_0}{e\omega_c^3}$. Calculer τ . Conclure.
Q12. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). On peut décomposer le mouvement de la particule en un mouvement sur un cercle dont le centre C se déplace le long de

l'axe Oz . Quelle est la nature du mouvement de C ? Comment se déplace alors l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

Q13. Quelle distance h parcourt le centre C sur l'axe Oz pendant la période T ?

Q14. Faire un schéma de la trajectoire d'un électron en faisant apparaître ses paramètres caractéristiques.

C. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et non uniforme : miroirs magnétiques

La Terre est entourée de zones, appelées « ceintures de Van Allen », où des particules chargées, de haute énergie, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique terrestre. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement. Dans ces zones, les trajectoires des particules s'enroulent autour des lignes de champ terrestre et ces particules chargées oscillent ainsi entre deux points M_0 et M'_0 appelés points miroirs (**Figure 3**).

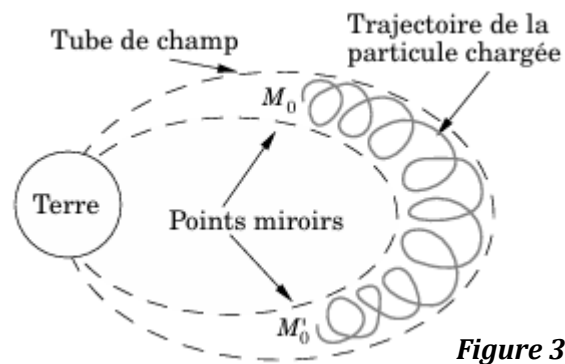


Figure 3

Pour comprendre le mouvement des particules chargées piégées dans ces zones, on s'intéresse au mouvement d'un électron plongé dans un champ magnétique stationnaire mais non uniforme.

On se limite ici au cas d'un champ magnétique stationnaire $\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$, possédant une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) (**Figure 4**). On supposera en première approximation que B_z ne dépend que de z et que cette composante est positive.

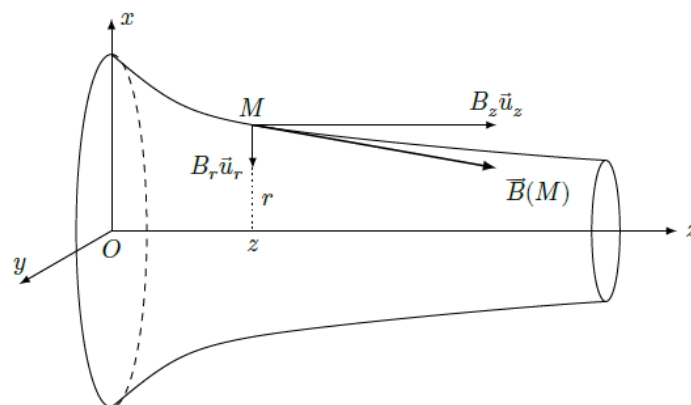


Figure 4

On montre qu'une propriété structurelle du champ magnétique impose $B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$ et que le champ magnétique s'intensifie lorsque les lignes de champ se resserrent.

L'électron de masse m est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Il possède initialement la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$) et se trouve au point de coordonnées cartésiennes $(0, -R(0), 0)$.

On étudie son mouvement autour de l'axe Oz .

Les variations spatiales de B_z sont supposées faibles, on considère la composante radiale du champ $B_r(r, z)$ comme une perturbation de la composante axiale $B_z(z)$. On peut alors décomposer le mouvement comme dans la question **Q12** mais avec un rayon lentement variable $R(z)$. Le rayon $R(z)$ du cercle variant très lentement sur un tour, la vitesse est supposée de forme hélicoïdale : $\vec{v} \approx v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$.

- Q15.** En considérant le champ magnétique comme « localement uniforme », justifier qualitativement (sans calcul) l'expression de $R(z)$ en fonction de B_z et de v_θ , composante orthoradiale de la vitesse de l'électron.
- Q16.** Montrer que la composante F_z sur l'axe Oz de la force de Lorentz a pour expression : $F_z = -\mu \frac{dB_z}{dz}$, où μ est une quantité positive à exprimer en fonction de m, v_θ et B_z .
- Q17.** Ecrire les trois équations du mouvement en coordonnées cylindriques issues du principe fondamental de la dynamique.
- Q18.** Montrer que la grandeur μ peut être considéré comme une constante du mouvement. (On pourra montrer que $\frac{d\mu}{dt} = 0$).
- Q19.** Montrer que l'énergie cinétique de l'électron est telle que $E_c = \frac{1}{2} m v_z^2 + \mu B_z$.

On considère un champ magnétique non uniforme dont on donne l'allure des lignes de champ et l'évolution de sa composante axiale B_z sur la **Figure 5**.

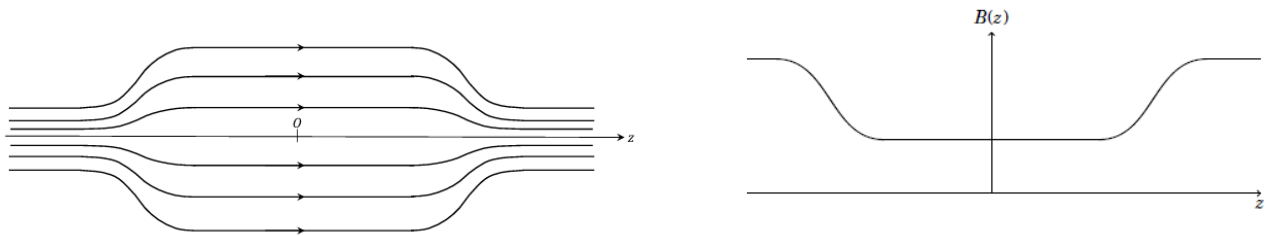


Figure 5

- Q20.** A l'aide d'une courbe judicieusement choisie, discuter qualitativement les différents mouvements possibles (états libres ou états liés) d'une charge dans ce type de configuration en fonction de la valeur de l'énergie cinétique E_c .
- Q21.** En déduire que dans certains cas la particule chargée ne peut entrer dans une zone où la composante du champ dépasse une valeur critique B_c que l'on exprimera en fonction de E_c et μ . Justifier alors le terme "miroir magnétique".
- Q22.** On suppose l'électron confiné dans une zone comprise entre les points M_0 et M'_0 symétriques sur l'axe Oz par rapport au point O , d'abscisses respectives z_0 et $z'_0 = -z_0$, vérifiant $B(z_0) = B(z'_0) = B_c$. On suppose que $B(O) < B_c < B_{max}$. Montrer que dans ces conditions le centre C oscille périodiquement à la période : $T_1 = 4 \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{B_c - B_z(z)}}$.

Dans la suite, on suppose que le champ axial est de la forme : $B_z(z) = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)$ où L est l'échelle caractéristique de variation de ce champ. On prendra L de l'ordre de 10^4 km.

- Q23.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée z . En déduire une pulsation caractéristique ω_0 associée au confinement de l'électron et l'ordre de grandeur du temps mis par un électron confiné pour accomplir un aller-retour entre le pôle Nord et le pôle Sud terrestres.

- Q24.** Du fait de l'accélération des particules chargées, on observe un rayonnement radio au-dessus de ses régions aurorales (cf. document d'introduction). Expliquer les localisations spatiale et spectrale de ce phénomène.
- Q25.** Évaluer la vitesse typique d'un électron dans les ceintures de Van Allen. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Exercice 2 : Effet photoélectrique

Observé pour la première fois en 1887 par Heinrich Hertz, l'effet photoélectrique désigne la capacité d'un rayonnement électromagnétique à arracher les électrons libres d'un matériau conducteur. Ces électrons peuvent être collectés au sein d'un circuit électrique, ce qui permet de mesurer un courant en présence du rayonnement : on parle de photo-courant. Afin de tester la théorie d'Einstein, Robert Andrews Millikan réalise en 1914 une expérience d'effet photoélectrique, qui s'avèrera concluante et permettra même de déterminer la valeur de la constante de Planck h .

Le principe de l'expérience est le suivant : au sein d'une chambre à vide, il place une cathode métallique en lithium reliée à une anode au moyen d'un générateur de tension continue u , et d'un ampèremètre mesurant le courant i dans le circuit, **figure 4 (a)**.

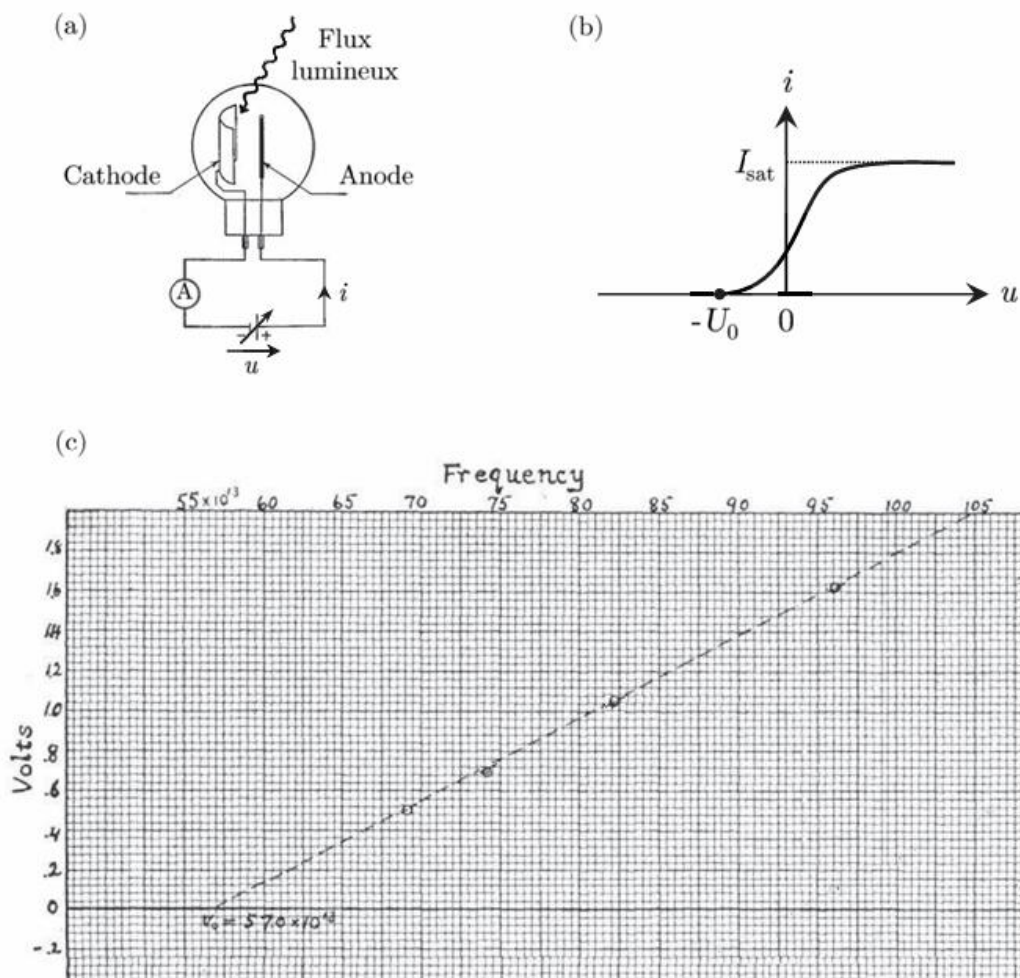


FIGURE 4 – Étude expérimentale de l'effet photoélectrique. (a) Schéma de la cellule photoélectrique. (b) Allure d'une courbe photocourant-potentielle. (c) Données expérimentales $U_0 = f(\nu)$ relevées par MILLIKAN. L'axe vertical est gradué tous les 0,2 V et l'axe horizontal tous les 5×10^{13} Hz. Au niveau de l'intersection du trait plein et du trait pointillé, on lit $\nu_0 = 57,0 \times 10^{13}$ Hz. Source : R. A. Millikan, *A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h"*, Phys. Rev. **7**, 355 (1916).

Un faisceau monochromatique issu d'une lampe à vapeur de mercure éclaire la cathode, sa longueur d'onde λ pouvant être réglée sur l'une des raies spectrales émises par la vapeur : 313 nm, 365 nm, 405 nm, 435 nm et 546 nm. La puissance lumineuse P du faisceau est également réglable. Pour toutes les longueurs d'onde exceptée $\lambda = 546$ nm, Millikan mesure un photo-courant $i > 0$ lorsqu'aucune tension n'est appliquée. En faisant varier u pour ces longueurs d'onde, il effectue les observations expérimentales suivantes :

- Augmenter la tension u provoque l'augmentation du courant i , jusqu'à une valeur de saturation I_{sat} . A l'inverse, i s'annule si on réduit u jusqu'à une valeur négative $-U_0$ appelée potentiel d'arrêt. La courbe $i = f(u)$ ainsi obtenue présente l'allure schématisée **figure 4 (b)**.
- Le potentiel d'arrêt U_0 ne dépend que de la fréquence ν .
- Le courant de saturation I_{sat} augmente avec la puissance lumineuse P .

Q26. L'énergie nécessaire pour arracher un électron de conduction dans le lithium vaut $W_0 = 2,4$ eV. Montrer en quoi l'hypothèse corpusculaire d'Einstein permet d'expliquer qu'aucun photo-courant n'est mesuré pour $\lambda = 546$ nm. On donne $hc \approx 1,2$ eV. μm .

On appelle photo-électrons les électrons qui sont éjectés de la cathode par effet photoélectrique. On suppose que ces derniers sont éjectés de la cathode avec des vitesses \vec{v} de même norme et de directions aléatoires.

- Q27.** Expliquer qu'en l'absence de tension u appliquée, on observe tout de même un photo-courant non-nul. Expliquer comment évolue la situation lorsqu'on applique une tension $u < 0$?
- Q28.** Justifier alors l'appellation « potentiel d'arrêt » donnée à la tension U_0 .
- Q29.** En considérant que l'énergie du rayonnement incident est intégralement transmise aux électrons libres de la cathode, exprimer le potentiel d'arrêt U_0 en fonction de e , h , ν et du travail d'extraction W_0 , et justifier la deuxième observation.
- Q30.** La **figure 4 (c)** représente les mesures $U_0 = f(\nu)$ obtenues par Millikan lui-même, en relevant le potentiel d'arrêt en fonction des longueurs d'onde associées aux différentes raies du mercure. A partir de ces mesures, déterminer la valeur numérique à laquelle il est parvenu pour la constante de Planck h .
- Q31.** Justifier que le courant i augmente progressivement à mesure qu'on applique une tension $u > 0$ croissante et expliquer la limitation du courant à une valeur de saturation, notée I_{sat} .
- Q32.** On appelle rendement quantique η la probabilité qu'un photo-électron soit émis lorsqu'un photon frappe la cathode. En supposant que tous les électrons arrachés atteignent l'anode, exprimer I_{sat} en fonction de η et justifier la troisième observation. Reproduire l'allure de la courbe **(b), figure 4**, pour différentes valeurs de la puissance lumineuse P à fréquence ν fixée, et proposer alors une méthode qui permettrait de déterminer η pour la cathode en lithium utilisée ici.

On réalise une expérience similaire avec une cathode de baryum éclairée par une lampe spectrale au mercure. Un système de filtres permet de sélectionner une longueur d'onde particulière λ émise par la lampe. Un dispositif expérimental indépendant permet de mesurer l'énergie cinétique E_c des électrons extraits de la plaque de baryum.

On récapitule ci-dessous les valeurs mesurées. L'incertitude-type de l'énergie cinétique est de 0.05 eV.

E_c (eV)	2.40	1.69	0.91	0.57	0.35
ν ($\times 10^{14}$ Hz)	11.825	10.111	8.210	7.4129	6.8838
$u(\nu)$ ($\times 10^{12}$ Hz)	2.3	1.7	1.1	0.91	0.79

On veut déduire de ces mesures la valeur de la constante de Planck ainsi que l'incertitude-type sur la mesure à l'aide d'une simulation Monte Carlo.

On propose le script suivant :

```

1. import numpy as np
2. frequences = np.array([11.825,10.111,8.210,7.4129,6.8838])*1e14
3. u_frequences = np.array([2.3,1.7,1.1,0.91,0.79])*1e12

4. Ec = np.array([2.40,1.69,0.91,0.57,0.35])*1.6e-19
5. u_Ec = 0.05*1.6e-19

6. a,b = np.polyfit(frequences,Ec,1)

7. # Simulation Monte Carlo pour estimer l'incertitude-type sur h
8. N = 1000 #Nombre de simulations

9. liste_h = []
10. for i in range(0,N):
11.     l = len(frequences)
12.     ec = 'à compléter'
13.     f = 'à compléter'
14.     p=np.polyfit('à compléter')
15.     liste_h.append(p[0])

16. u_h = np.std(liste_h, ddof=1)
17. print("Constante de Planck = {:.2e} +/- {:.2e} J.s".format(a,u_h))

```

Q33. Expliquer ce qui est fait à la 6^{ème} ligne. Que renvoie-t-elle ?

Q34. Compléter les lignes 12, 13 et 14 (en gras).

Q35. Ecrire la ligne de code qui permettrait de calculer la fréquence seuil du baryum.

Formulaire

Incertitudes-type (la notation *u* désigne l'incertitude-type)

Pour une mesure de précision ou tolérance p : $u = \frac{p}{\sqrt{3}}$

Outil Python :

La fonction random de la bibliothèque numpy génère un nombre aléatoire dans un intervalle donné.

np.random.uniform(a,b,N) génère N valeurs comprises dans un intervalle donné [a,b] selon une distribution uniforme.

np.std(liste, ddof=1) renvoie l'écart-type expérimental de la liste de données 'liste'