

# Correction DS7

## Exercice 1

Q1. Les électrons entrent en collisions avec les molécules de l'atmosphère. Les molécules ainsi excitées se désexcitent en émettant des photons.

Q2. La symétrie des lignes de champ magnétique fait que si des particules chargées peuvent pénétrer au niveau d'un pôle, d'autres peuvent le faire au niveau de l'autre pôle.

Q3. La force de gravitation est en général négligeable devant la force de Lorentz (ici composante magnétique)

$$\|\vec{F}_{\text{grav}}\| = m \|\vec{g}\| = 10^{-29} \text{ N pour 1 électron} \quad \|\vec{F}_{\text{Lorentz}}\| = e v B \quad \frac{1}{2} m v^2 = 1 \text{ keV} = 10^{-16} \text{ J}$$

$$v = 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\|\vec{F}_{\text{Lorentz}}\| = 10^{-19} \times 10^7 \times 5 \times 10^{-5} = \underline{5 \times 10^{-16} \text{ N}}$$

Q4. Système:  $\{e^-\}$     Réf: géocentrique support galiléen    Bdf: force de Lorentz magnétique

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e v_z \vec{u}_z \wedge B \vec{u}_z = \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_{0z} \vec{u}_z$$

Le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme.

Q5. La force de Lorentz ne travaille pas car orthogonale au vecteur vitesse:  $\Delta E_c = 0 \Rightarrow \boxed{v = \text{constante}}$

$$Q6 \quad \vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} -e v_x & \wedge & 0 \\ -e v_y & & 0 \\ -e v_z & & B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e v_y B_0 \\ e v_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{PFD: } \begin{cases} m \ddot{x} = -e y B_0 \\ m \ddot{y} = e x B_0 \end{cases} \quad \text{On pose } \boxed{\omega_c = \frac{e B_0}{m}} \quad \text{homopène à une pulsation}$$

$$\omega_c = 3 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

Q7. (1)  $\ddot{x} = -\omega_c \dot{y}$

(2)  $\ddot{y} = \omega_c \dot{x} \rightarrow \dot{y} = \omega_c x \quad (\dot{y}(0) = 0) \rightarrow \text{Dans (1): } \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$

$$x(t) = X_m \cos(\omega_c t + \varphi) \quad x(0) = 0 \quad X_m \cos \varphi = 0 \quad \varphi = \pi/2$$

$$\dot{x}(0) = v_{0x} \quad -X_m \omega_c \sin \varphi = v_{0x} \quad X_m = -\frac{v_{0x}}{\omega_c}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t)}$$

$$y = v_{0y} \sin(\omega_c t) \quad y = -\frac{v_{0y}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + Cte \quad y(0) = 0 \Rightarrow Cte = \frac{v_{0y}}{\omega_c}$$

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$$

Equation de la trajectoire :  $\sin(\omega_c t) = \frac{x}{v_{0y}/\omega_c} \quad \cos(\omega_c t) = \frac{\frac{v_{0y}}{\omega_c} - y}{v_{0y}/\omega_c}$

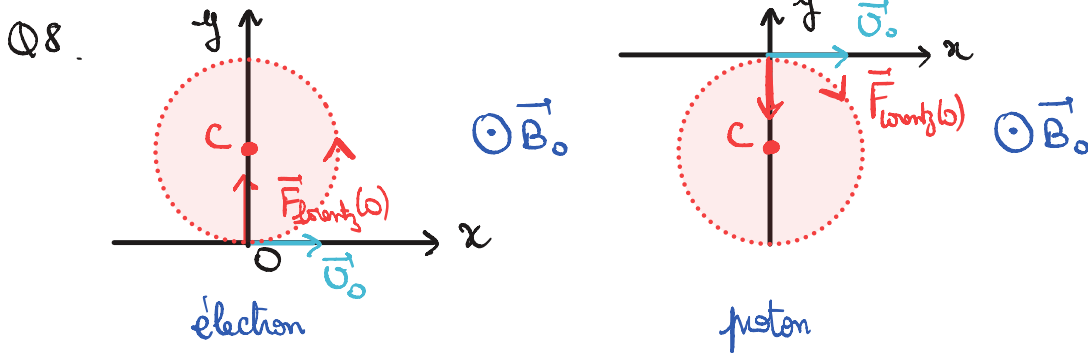
$$\sin^2(\omega_c t) + \cos^2(\omega_c t) = 1$$

On pose  $R = \frac{v_{0y}}{\omega_c}$

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad \text{équation d'un cercle de centre } C(0, R) \text{ et de rayon } R = \frac{mv_{0y}}{eB_0}$$

Période de révolution :  $T = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad T = \frac{2\pi m}{eB_0}$

AN pour  $v_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1}$  :  $R = 3 \times 10^2 \text{ m} \quad T =$



Q9.  $[P] = [fue] \cdot L \cdot T^{-1} \quad \left[ \frac{1}{\epsilon} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\|^2 \right] = [fue] L^2 [charge]^{-2} L^2 \cdot T^{-2}$   
 $= [fue] [charge]^{-2} L^4 \cdot T^{-4}$

$[e] = [charge] \rightarrow \alpha = 2$

$[c] = L \cdot T^{-1} \rightarrow \beta = -3$

Q10  $E_c = \frac{1}{2} m v_{0y}^2 = \frac{1}{2} m v (R \omega_c)^2 \quad \Delta E_c = m v \omega_c^2 R dR$

Q11. TPC :  $\frac{dE_c}{dt} = -P$   
 $\uparrow$  perte par rayonnement

$$\frac{dE_c}{dt} = m v_c^2 R \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} e^2 \|\vec{a}\|^2 \quad \text{PFD} \Rightarrow \|\vec{a}\| = R \omega_c^2$$

si on considère la trajectoire quasi-circulaire.

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{e^2 \omega_c^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 m \omega_c^2} R \quad \text{On pose } \tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_c^2} \text{ tel que } R(t) = R(0) \exp(-t/\tau)$$

$$m = \frac{e B_0}{\omega_c} \quad \tau = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{B_0}{e \omega_c^3} \quad \tau = 1,8 \times 10^{14} \text{ s}$$

Le temps est suffisamment grand devant la durée d'observation pour mépriser les pertes par rayonnement et la déviation de R.

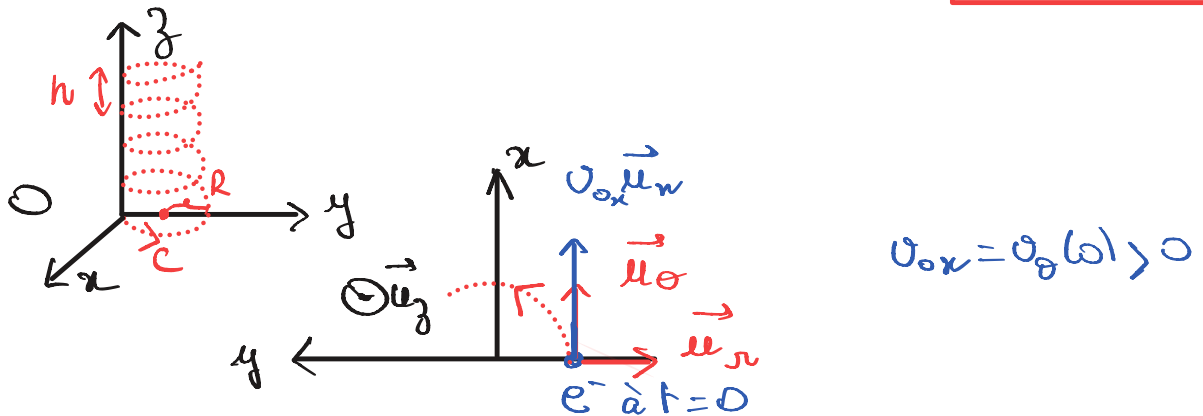
Q12 Il faut rajouter au mouvement circulaire, un mouvement selon  $Oz$  :

$$m \ddot{z} = 0 \quad \dot{z} = Cte = v_{Oz} \quad z(t) = v_{Oz} t \quad \text{mouvement de C: } \underline{\text{rectiligne uniforme}}$$

la trajectoire est une hélice qui s'enroule autour des lignes de champ.

Q13  $T = \frac{2\pi m}{e B_0}$  pas de l'hélice :  $h = v_{Oz} \times T$   $h = \frac{2\pi m v_{Oz}}{e B_0}$

Q14



Q15

Donc l'hypothèse où  $B_r$  est une perturbation, on peut conserver l'expression de R déjà

établie à condition de remplacer  $B_0$  par  $B_z$  et  $v_{Oz}$  par  $v_\theta(z)$ :  $R(z) = \frac{m v_\theta}{e B_z}$

Q16  $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e \begin{vmatrix} 0 \\ v_\theta \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e v_\theta B_z \\ -e B_r v_z \\ e v_\theta B_r \end{vmatrix}$

$$F_z = -e v_\theta \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \quad \mu = e v_\theta \frac{r}{2} = e v_\theta \frac{R(z)}{2} = e v_\theta \frac{m v_\theta}{2 e B_z} \quad \mu = \frac{m v_\theta^2}{2 B_z}$$

Q17

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -v_\theta \dot{\theta} \\ dv_\theta/dt \\ dv_z/dt \end{pmatrix}$$

PPD: 
$$\begin{aligned} -mv_\theta \dot{\theta} &= -e v_\theta B_z \\ m \frac{dv_\theta}{dt} &= -e B_r v_z \\ m \frac{dv_z}{dt} &= -e v_\theta \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \end{aligned}$$

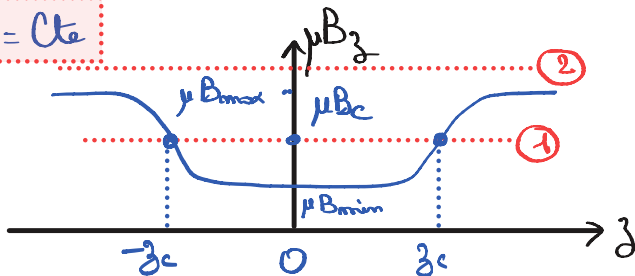
Q18. 
$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{B_z} 2 \frac{dv_\theta}{dt} v_\theta - v_\theta^2 \frac{dB_z/dt}{B_z^2} \right)$$

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{dB_z}{dz} \times v_z = -\frac{2}{R} B_r v_z = -\frac{2 B_r v_z}{m v_\theta} e B_z \quad \frac{dv_\theta}{dt} = -\frac{e B_r v_z}{m}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{m}{2} \left( -\frac{1}{B_z} 2 \frac{e B_r v_z}{m v_\theta} v_\theta + v_\theta^2 \frac{2 B_r v_z}{B_z^2 m v_\theta} e B_z \right) = 0 \quad \mu = Cte$$

Q19. 
$$E_c = \frac{1}{2} m v_\theta^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \quad E_c = \mu B_z + \frac{1}{2} m v_z^2$$

Q20.  $E_c = Cte$



$$\frac{1}{2} m v_z^2 \geq 0 \Rightarrow E_c \geq \mu B_z$$

cas ① :  $\mu B_{\min} < E_c < \mu B_{\max}$  état lié :  $z \in [-z_c; z_c]$

cas ② :  $E_c \gg \mu B_{\max}$  état de diffusion

Q21. Dans le cas ② : la particule est confinée dans 1 zone de champ telle

que  $B_z \leq B_c = \frac{E_c}{\mu}$

En  $z = \pm z_c$   $v_z = 0$ , la particule repart en sens inverse vers un point symétrique

où le même rebroussement se produit.

Q22.  $E_c = \mu B_c = \frac{1}{2} m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \mu B_z$

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu(B_c - B_z)}{m} \quad \frac{dz}{dt} = \pm \left( \frac{2\mu(B_c - B_z)}{m} \right)^{1/2}$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2\mu(B_c - B_z)}} dz$$

On intègre sur  $1/4$  de période, entre  $t=0$  et  $t = \frac{T}{4}$  correspondant respectivement

à  $z=0$  et  $z=z_0 (>0)$

$$\frac{T}{4} = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{m}{2\mu(B_c - B_z)}} dz$$

$$T = 4 \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{m}{2\mu(B_c - B_z)}} dz$$

Q23.  $m \ddot{z} = -\mu \frac{dB_z}{dz} = -\mu \frac{2B_0}{L^2} z$

$$\ddot{z} + \frac{2\mu B_0}{mL^2} z = 0$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'oscillation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu B_0}{mL^2}}$

Durée d'1 aller retour : 1 période =  $\frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\mu = \frac{m v_0^2}{2B_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{L} |v_0| = \frac{1}{L} R_c \omega_c$$

$$R_c = 3 \times 10^8 \text{ m} \quad \omega_c = 3 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow \text{durée de l'ordre de la seconde}$$

Q24. la puissance rayonnée est d'autant plus grande que  $\omega_c$  est grande et donc que  $B_0$  est grand. le rayonnement est donc particulièrement important près de la Terre et aux pôles.

$$\omega_c = \frac{eB_T}{m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-5}}{9 \times 10^{-31}} \approx 9 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow \lambda = 2 \times 10^2 \text{ m}$$

Q25.  $E_c = 0,1 \text{ à } 1 \text{ GeV} \Rightarrow v = 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > c$  impossible.

L'e- est relativiste : il faut reprendre les calculs...

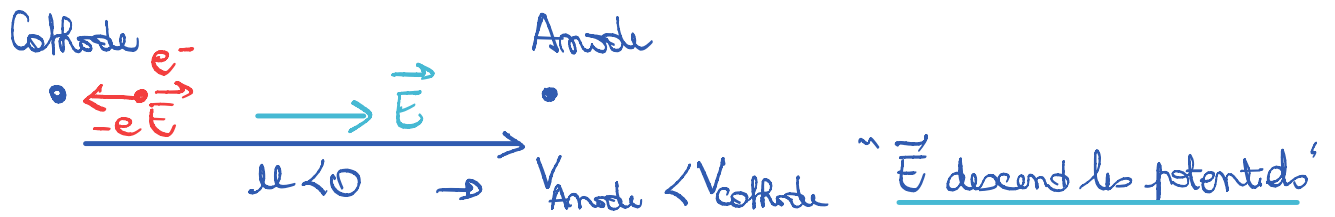
Q26. Pour qu'un photon transfère son énergie à un électron, lui permettant ainsi de s'échapper de la structure, son énergie doit être telle que  $\frac{hc}{\lambda} \geq \phi_0$  soit

$$\lambda \leq \frac{hc}{\phi_0} = 500 \text{ nm} \quad \lambda_0 = 500 \text{ nm pour la suite}$$

On comprend ainsi que pour  $\lambda = 546 \text{ nm} (\gg \lambda_0)$  l'effet photoélectrique n'est pas possible.

Q27. Si l'énergie des photons est suffisante, les électrons éjectés ont une énergie cinétique  $E_c = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$ . Des électrons peuvent alors atteindre l'anode et on observe un courant. Tous ne sont pas collectés du fait des directions aléatoires

Si on applique une tension  $u < 0$ , un champ électrique apparaît et les électrons sont alors soumis à la force  $-e\vec{E}$ .



Si  $u < 0$ , la force s'oppose au mouvement de la cathode vers l'anode, le courant diminue.

Q28. Il existe une valeur de  $u$ ,  $-U_0$ , telle que les électrons éjectés à la vitesse  $v$  soit freiné par la force  $-e\vec{E}$  et atteignent l'anode avec une vitesse nulle.

Q29. Système conservatif, frotts négligés :  $E_c + E_{pe} = Cte$

$$\underbrace{E_c(\text{Cathode})}_{\frac{1}{2}mv^2} - eV_{\text{Cathode}} = \underbrace{E_c(\text{Anode})}_{=0} - eV_{\text{Anode}} \quad \text{si } V_{\text{Anode}} - V_{\text{Cathode}} = -U_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_0 \quad \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - \phi_0$$

$$U_0 = \frac{h\nu - \phi_0}{e}$$

$U_0$  ne dépend que de  $\nu$ , pas de  $P$ .

Q30. On peut déduire  $h$  de la pente de  $U_s(v)$ .

$$\text{pente} = \frac{h}{e} \rightarrow h = e \times \frac{1,6 - 0}{(97 - 57) \times 10^{-13}} = \underline{6,41 \times 10^{-24} \text{ J.s}}$$

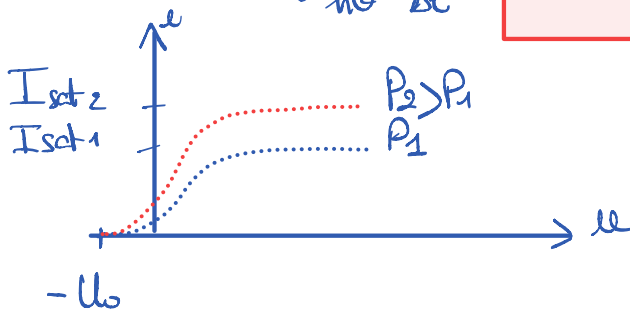
$1,602 \times 10^{-19}$

Q31. Si  $u > 0$ , les  $e^-$  sont accélérés vers l'anode. Le nombre atteignant l'anode augmente. S'ils atteignent tous l'anode, le courant atteint une valeur maximale dite de saturation.

Q32.  $\eta = \frac{N_{e^-}}{N_g}$       $I_{\text{sat}} = \frac{N_{e^-} e}{\Delta t}$       $N_g = \frac{P \Delta t}{h\nu}$

$$\rightarrow I_{\text{sat}} = \eta \frac{P \Delta t}{h\nu} \frac{e}{\Delta t}$$

$$I_{\text{sat}} = \eta \frac{P e}{h\nu}$$



Si  $P \uparrow$ ,  $I_{\text{sat}} \uparrow$

On pourrait tracer  $I_{\text{sat}}(P)$  et déduire  $\eta$  de la pente  $(\eta \frac{e}{h\nu})$

Q33. La fonction polyfit fait une régression linéaire, ici  $E_c$  (fréquences) et renvoie 1 couple (pente, ordonnée à l'origine) comme  $E_c = h\nu - h\nu_0$ , la pente est en théorie  $h$ .

Q34.  $ec = E_c + u \cdot E_c * \text{mp.sqrt}(3) * \text{mp.random.uniform}(-1, 1, 1)$

$f = \text{fréquences} + u \cdot \text{fréquences} * \text{mp.sqrt}(3) * \text{mp.random.uniform}(-1, 1, 1)$

$p = \text{mp.polyfit}(f, ec, 1)$

Q35.  $mu_0 = -b/a$