Correction TD17

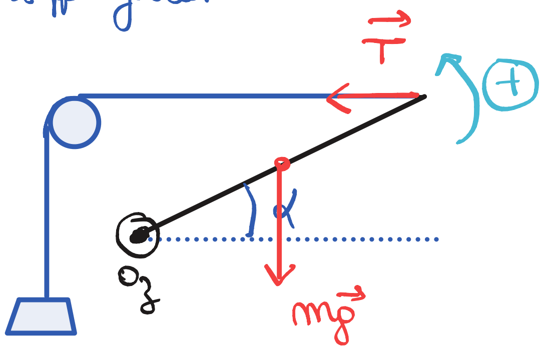
Exercice 1

Système : { Pont levis }   Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids $m\vec{g}$

. tension du câble $\vec{T}$

. réaction de l'axe $\vec{R}_{axe}$



TMC scalaire   équilibre $\sum \mathcal{M}_{O_z} = 0$

$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{R}_{axe}) = 0$ car liaison parfaite

$\mathcal{M}_{O_z}(m\vec{g}) = -mg\frac{L}{2}\cos\alpha$

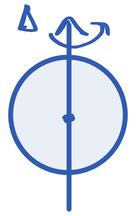
$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{T}) = \|\vec{T}\| L \sin\alpha$

équilibre du contre-poids $\Rightarrow \|\vec{T}\| = Mg$

$$Mg\cancel{L}\sin\alpha - mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad M = \frac{m}{2\tan\alpha} = 1{,}2 \times 10^3\ \text{kg}$$

Exercice 2

1) Système : { Soleil }   Réf de Copernic (galiléen)   BdF : forces de gravitation, toutes coupant l'axe de rotation donc de moment scalaire nul



TMC scalaire : $L_\Delta = C^{te}$

2) $$L_\Delta = 0{,}4\, m R_S^2 \frac{2\pi}{T_S} = 0{,}4\, m R_T^2 \frac{2\pi}{T_{NB}}$$

3) $$T_{NB} = \left(\frac{R_T}{R_S}\right)^2 T_S \qquad T_{NB} = 200\ \text{s}$$

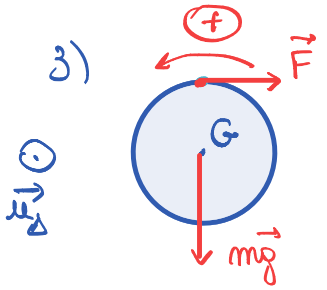
Exercice 3

1) Modèle le + approprié : cylindre creux car l'essentiel de la masse est situé à l'extérieur.

2) J_Δ est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe par rapport auquel on travaille

$$\underbrace{J_\Delta(\text{cylindre creux})}_{mR^2} > \underbrace{J_\Delta(\text{cylindre plein})}_{mR^2/2} \text{ à masse équivalente}$$

3)



Système : {roue}   Réf : terrestre sup. galiléen

BdF : $\vec F$, $m\vec g$, $\vec R_{axe}$

$M_\Delta(m\vec g) = 0$ car $m\vec g$ s'applique en G qui $\in$ à l'axe Oz

$M_\Delta(\vec R_{axe}) = 0$ car liaison pivot parfaite

$M_\Delta(\vec F) = -FR$

$\Rightarrow M_\Delta = -FR$

4) TMC scalaire selon : $J_\Delta \ddot\theta = -FR = Cte \to \dot\theta(t) = -\frac{F}{mR}t + \omega_0$ $(\dot\theta(0) = \omega_0)$

et 5) $\theta(t) = -\frac{F}{2mR}t^2 + \omega_0 t$ $(\theta(0) = 0)$

6) $\theta(t_{arrêt}) = 2\pi$ il faut déterminer $t_{arrêt}$. $\dot\theta(t_{arrêt}) = 0 \to t_{arrêt} = \frac{mR\omega_0}{F}$

$$2\pi = -\frac{\cancel{F}}{2\cancel{m}\cancel{R}}\frac{m^{\cancel{2}}R^{\cancel{2}}\omega_0^2}{F^{\cancel{2}}} + \frac{mR\omega_0^2}{F} = \frac{mR\omega_0^2}{2F} \Rightarrow F = \frac{mR\omega_0^2}{4\pi} = 12\,N$$

Exercice 4

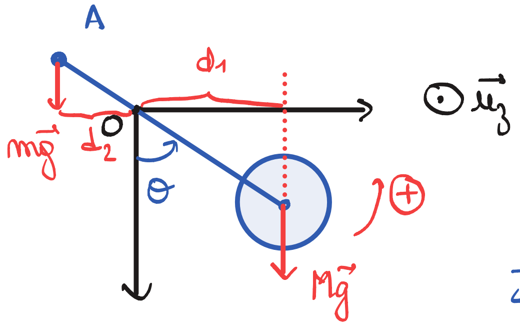
1) Quand x ↗, J ↗ : en éloignant le curseur on modifie la répartition de la masse, celle-ci est plus éloignée de l'axe de rotation donc J ↗.

2) Système : {métronome}   Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : • poids = $m\vec g$ + $M\vec g$ appliqué en C

appliqué en A

• $\vec R_{axe}$



TMC scalaire selon Oz : $J\ddot\theta = \mathcal{M}_{Oz}(m\vec g) + \mathcal{M}_{Oz}(M\vec g) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec R_{axe})$

$=0$ car liaison pivot parfaite

$J\ddot\theta = -Mgd_1 + mgd_2$

bras de levier : $d_1 = \ell\sin\theta$ $d_2 = x\sin\theta$ $\Rightarrow J\ddot\theta = -g(M\ell - mx)\sin\theta$

$$\ddot\theta + g\frac{M\ell - mx}{J}\sin\theta = 0$$

3) On peut linéariser $\sin\theta \simeq \theta$ (petits angles) $\ddot\theta + \underbrace{g\frac{M\ell - mx}{J}}_{\omega_0^2}\theta = 0$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{(M\ell - mx)g}}$$

4) 100 battements / min → 50 périodes / min → $T_0 = \frac{60}{50} = 1{,}2\,s$

5) ↘ le nb de battements ⟺ ↗ T_0

$$T_0 = 2\pi\left(\frac{mx^2 + \frac{2}{5}mR^2 + M\ell^2}{gM\ell - gmx}\right)^{1/2} \nearrow \text{ si } x \text{ augmente}$$

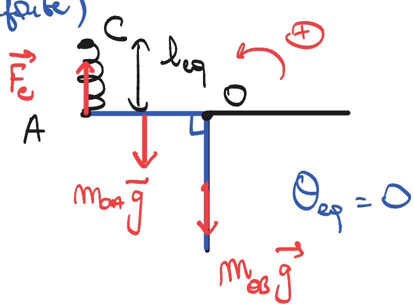
Exercice 5

1) Système : {Solide de masse M}   Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids (décomposé en 2 : $m_{OA}\vec g + m_{OB}\vec g$) $m_{OA} = m_{OB} = \frac{M}{2}$

. $\vec R_{axe}$ (liaison pivot parfaite)

. $\vec F_e = -k(\ell - \ell_0)\vec u_x$



le sens de $\vec F_e$ se déduit de l'équilibre

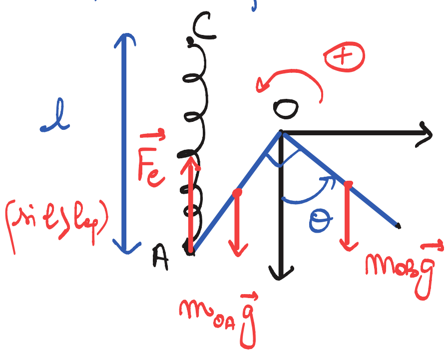
A l'équilibre : $\sum \mathcal{M}_{Oz} = 0$

$$\sum \mathcal{M}_{Oz} = \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(m_{OA}\vec g)}_{\frac{M}{2}a g} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(m_{OB}\vec g)}_{0 \text{ car coupe l'axe de rotation}} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(\vec F_e)}_{-k(\ell_{eq} - \ell_0)2a} + \mathcal{M}_{Oz}(\vec R_{axe})$$

$=0$ car coupe l'axe (liaison pivot parfaite)

$\frac{M}{2}g = 2k(\ell_{eq} - \ell_0)$ → $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{Mg}{4k}$

2) Hors équilibre : $\theta \neq \theta_{eq} = 0$



<u>TMC scalaire selon Oz :</u>

$$J\ddot{\theta} = \sum M_{Oz} \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = -\frac{M}{2} g a \sin\theta + \frac{M}{2} g a \cos\theta - k(\ell - \ell_0)\, 2a \cos\theta$$

$$\ell = \ell_{eq} + 2a\sin\theta$$

$$4\frac{Ma^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{M}{2} g a \sin\theta + \cancel{\frac{M}{2} g a \cos\theta} - \left(\cancel{\frac{Mg}{4}} + 2ka\sin\theta\right) 2a\cos\theta$$

$$4\frac{Ma^2}{3}\ddot{\theta} = -\left(\frac{M}{2} g a + 4ka^2\cos\theta\right)\sin\theta$$

<u>Approximation des petits angles :</u> $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$ (pour linéariser)

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{3k}{M} + \frac{3}{8}\frac{g}{a}\right)}_{\omega_0^2}\sin\theta = 0 \rightarrow T_0 = 2\pi\left(\frac{3k}{M} + \frac{3}{8}\frac{g}{a}\right)^{-1/2}$$

Exercice 6

1) a) <u>Système</u> : {rotor} <u>Réf</u> : terrestre supposé galiléen

<u>BdF</u> : . $m\vec{g}$ appliqué en $G \in$ axe de rotation $\Rightarrow M_\Delta(m\vec{g}) = 0$

. couple moteur $M_\Delta = C_m = kI$

. $\vec{R}$ axe de moment nul en l'absence de frottements

<u>TMC scalaire selon Oz</u> : $J\frac{d\omega}{dt} = kI$

b) $\omega(t) = \frac{kI}{J}t$

c) $T_0 = 0{,}9\ s$

2) On rajoute les frottements : ⚠ moments < 0.

a) le TMC scalaire selon Oz devient : $J\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + kI - C_s$

b) Régime permanent $\omega = Cte$ $\omega_p = \frac{kI - C_s}{\lambda} = 1800\ rad.s^{-1} \leftarrow \omega_0$

c) $T = 3\tau$ avec $\tau = \frac{J}{\lambda}$ $T = 3{,}2\ s$ ($> T_0$, logique ...)

3) $J\dfrac{d\omega}{dt} = C_m(1+\eta\cos(\Omega t)) - \lambda\omega - C_s$

$\omega = \omega_0(1+\mathcal{E}(t))$ où $\omega_0 = \dfrac{C_m - C_s}{\lambda}$

$$J\omega_0 \frac{d\mathcal{E}}{dt} = C_m + \eta C_m \cos(\Omega t) - \lambda\omega_0 - \lambda\omega_0\mathcal{E} - C_s$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \underbrace{\frac{C_m - C_s}{J\omega_0} - \frac{\lambda}{J}}_{=0} - \frac{\lambda}{J}\mathcal{E} + \frac{\eta}{J\omega_0} C_m \cos(\Omega t)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\lambda}{J}\mathcal{E} = \frac{\eta}{J\omega_0} C_m \cos(\Omega t) \qquad \left(\tau = \frac{J}{\lambda}\right)$$

4) la solution homogène de la forme $\mathcal{E}(t) = A\exp(-t/\tau)$ tend rapidement vers 0

$\mathcal{E}(t) \simeq \mathcal{E}_p$ solution particulière de la forme $a\cos(\Omega t + \varphi)$ (RSF)

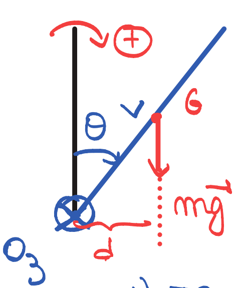
5) On passe en $\mathbb{C}$: $j\Omega\underline{\mathcal{E}} + \dfrac{1}{\tau}\underline{\mathcal{E}} = \dfrac{\eta}{J\omega_0} C_m e^{j\Omega t}$

$$\underline{\mathcal{E}} = \frac{\frac{\eta}{J\omega_0} C_m e^{j\Omega t}}{1/\tau + j\Omega} \qquad a = |\underline{\mathcal{E}}| \rightarrow a = \frac{C_m\eta}{J\omega_0\sqrt{1/\tau^2 + \Omega^2}} \qquad a = \frac{C_m\eta}{\omega_0(\lambda^2 + J^2\Omega^2)}$$

$$\varphi = \arg(\underline{\mathcal{E}}) - \Omega t = -\arctan(\Omega\tau)$$

6) le volant d'inertie permet d'augmenter J et donc de diminuer l'amplitude a des variations de $\omega(t)$.

Exercice 7



Système : {arbre} Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : · poids
· R_{axe} ← de moment supposé nul

1) TMC scalaire selon O_z : $J\ddot{\theta} = mg\underbrace{\frac{L}{2}\sin\theta}_{d \text{ (bras de levier)}}$ ($\theta \nearrow$, θ n'est pas petit donc $\sin\theta \neq \theta$)

2) $J\ddot{\theta}\dot{\theta} = mg\dfrac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}$

En intégrant entre $t=0$ et t : $\underset{\uparrow\, m\frac{L^2}{3}}{J}\dfrac{\dot{\theta}^2}{2} = -mg\dfrac{L}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Soit $\dot\theta = \left(\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right)^{1/2}$ $(\dot\theta > 0)$

3) $dt = \frac{d\theta}{\left[\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]^{1/2}}$ on intègre entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = \pi/2$ (au sol)

$$T = \underbrace{\sqrt{\frac{L}{3g}}}_{\simeq 1} \underbrace{\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{1}{(\cos\theta_0 - \cos\theta)} d\theta}_{5,1 \text{ pour } \theta_0 = 5,1\,s}$$

$T = 5,1\,s$

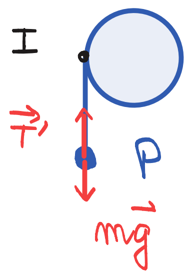
Exercice 8

1) le fil étant inextensible et tendu, tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. v (M en contact avec le cylindre) $= v$ (M ∈ fil "libre") $\Leftrightarrow R\omega = \dot z$

2) Système : {masse m (P)} Rdf : terrestre supposé galiléen

BdF : • poids $m\vec g$

• tension du fil $\vec T'$



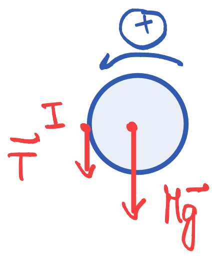
PFD : $m\ddot z\,\vec u_z = mg\,\vec u_z + \vec T' \Rightarrow \vec T' = m(\ddot z - g)\vec u_z$

• Action subie par le fil de la part du contrepoids : $-\vec T'$ en P (3° loi de Newton)

• le fil est inextensible et de masse négligeable : la norme de la tension est la même en tout point du fil. $\vec T$ en I $= \vec T$ en P

$$\vec T = m(g - \ddot z)\vec u_z$$

3) Système : {cylindre}



BdF : • poids $\mathcal{M}_{Ox}(M\vec g) = 0$ car $M\vec g$ coupe l'axe Ox

• frottements de moment $\Gamma_f = -\lambda\omega$ par rapport à Ox

• tension en I de moment $\mathcal{M}_{Ox}(\vec T) = m(g - \ddot z)R$

$$J_{Ox}\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + mgR - mR^2\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J_{Ox} + mR^2}\omega = \frac{mgR}{J_{Ox} + mR^2}$$

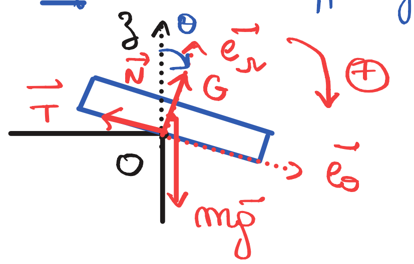
4) On peut poser $\tau = \frac{J_{Oz}+mR^2}{\lambda}$ et $\omega_p = \frac{mgR}{\lambda}$ valeur de ω en régime permanent.

$\omega(t) = (\omega(0)-\omega_p)\exp(-t/\tau)+\omega_p$ $\qquad$ $\omega \simeq \omega_p$ au bout de $5\tau \rightarrow$ régulateur

Rq : on retrouve la m̂ chose en étudiant le système {cylindre + contrepoids} avec $J_{Oz,S} = J_{Oz}+mR^2$, $\vec{T}$ est interne, elle n'intervient pas dans le bilan des forces mais il faut mettre $m\vec{g}$.

Exercice 9

1) Système : {tartine} $\qquad$ Réf : terrestre supposé galiléen



⊗ $\vec{e_y}$

BdF : • $\vec{R}$

• $m\vec{g}$

TMC scalaire selon Oy : $J_{Oy}\ddot{\theta} = mge\sin\theta$ $\qquad$ $\ddot{\theta} = \frac{3ge}{a^2+4e^2}\sin\theta$

2) $\times\dot{\theta}$ et en intégrant : $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{3ge}{a^2+4e^2}(\underbrace{\cos\theta(0)}_{1}-\cos\theta)$ $\qquad$ $\eta = \frac{e}{a}$

$\rightarrow \omega^2 = \frac{6g\eta}{a(1+4\eta^2)}(1-\cos\theta)$

3) $\vec{a}_G = -e\dot{\theta}^2\vec{u}_r + e\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ $\qquad$ (tant que la tartine ne glisse pas)

4) $-me\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N$

$me\ddot{\theta} = mg\sin\theta + T$

5) $N = mg\cos\theta - m\frac{6g\eta^2}{1+4\eta^2}(1-\cos\theta) = -m\frac{6g\eta^2}{1+4\eta^2} + mg\left(1+\frac{6\eta^2}{1+4\eta^2}\right)\cos\theta$

$T = m\frac{3ge^2}{a^2+4e^2}\sin\theta - mg\sin\theta = mg\sin\theta\left(\frac{3\eta^2}{1+4\eta^2}-1\right)$ $\leftarrow = -\|\vec{T}\|$!

6) Condition de glissement $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$

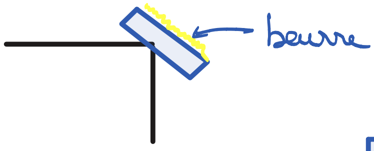
$\left(\underbrace{-6mg\eta^2 + mg(1+6\eta^2)}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f = mg\frac{\sqrt{2}}{2}(-3\eta^2+1)$

$mg\frac{\sqrt{2}}{2}f = mg\frac{\sqrt{2}}{2}(1-3\eta^2) \simeq mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $f \simeq 1$

7) $\Omega = \dot{\theta}$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\Omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/2}$ $\quad$ $\omega_0^2 = \frac{6\eta g}{a(1+4\eta^2)}$

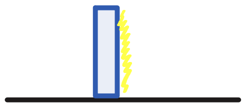
$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} + \Omega t$$

8)



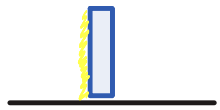
La tartine retombe côté pain si $\theta(\text{sol}) < \pi/2$

ou si $\theta(\text{sol}) > \frac{3\pi}{2}$



sol

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$



sol

$\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$

9) <u>Système</u> : $\{G\}$ $\quad$ <u>BdF</u> : $m\vec{g}$

a) $z_G(t) = \frac{1}{2} g t^2$ $\rightarrow$ $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad$ $\tau = 0{,}39\,s$

b) $\theta(\tau) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{6\eta g}{a(1+4\eta^2)}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{1/2} \times \tau = 3{,}3\,\text{rad}$ $\quad$ $(\eta = 1/10)$

$\theta(\tau) = 189°$ $\quad$ $\theta_1 < \theta(\tau) < \theta_2$ $\rightarrow$ la tartine retombe sur le côté beurre !