Correction TD17

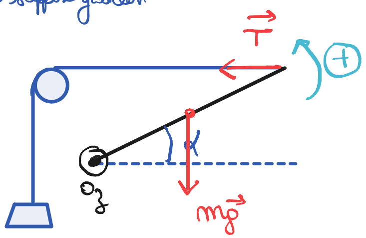
Exercice 1

Système : { Pont levis }   Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids $m\vec{g}$

. tension du câble $\vec{T}$

. réaction de l'axe $\vec{R}_{axe}$



TMC scalaire   équilibre $\sum \mathcal{M}_{O_z} = 0$

$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{R}_{axe}) = 0$ car liaison parfaite

$\mathcal{M}_{O_z}(m\vec{g}) = -mg\frac{L}{2}\cos\alpha$

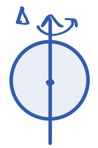
$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{T}) = \|\vec{T}\| L \sin\alpha$

équilibre du contre-poids $\Rightarrow \|\vec{T}\| = Mg$

$Mg\cancel{L}\sin\alpha - mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\alpha = 0 \rightarrow M = \frac{m}{2\tan\alpha} = 1{,}2 \times 10^3$ kg

Exercice 2

1) Système : { Soleil }   Réf de Copernic (galiléen)   BdF : forces de gravitation, toutes coupent l'axe de rotation donc de moment scalaire nul



TMC scalaire : $L_\Delta = C^{te}$

2) $L_\Delta = 0{,}4\, m R_S^2 \frac{2\pi}{T_S} = 0{,}4\, m R_T^2 \frac{2\pi}{T_{NB}}$

3) $T_{NB} = \left(\frac{R_T}{R_S}\right)^2 T_S$ $T_{NB} = 200$ s

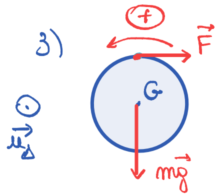
Exercice 3

1) Modèle le + approprié : cylindre creux car l'essentiel de la masse est situé à l'extérieur.

2) J_Δ est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe par rapport auquel on travaille

$\underset{mR^2}{J_\Delta(\text{cylindre creux})} > \underset{mR^2/2}{J_\Delta(\text{cylindre plein})}$ à masse équivalente

3)



Système : { roue }   Réf : terrestre sup. galiléen

BdF : $\vec{F}$, $m\vec{g}$, $\vec{R}_{axe}$

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = 0 \text{ car } m\vec{g} \text{ s'applique en G qui } \in \text{ à l'axe } O_z \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{axe}) = 0 \text{ car liaison pivot parfaite} \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -FR \end{array}\right\} \mathcal{M}_\Delta = -FR$

4) TMC scalaire selon : $J_\Delta\ddot{\theta} = -FR = C^{te} \rightarrow \dot{\theta}(t) = -\frac{F}{mR}t + \omega_0$ ($\dot{\theta}(0) = \omega_0$)

et 5) $\theta(t) = -\frac{F}{2mR}t^2 + \omega_0 t$ ($\theta(0) = 0$)

6) $\theta(t_{arrêt}) = 2\pi$ il faut déterminer $t_{arrêt}$. $\dot{\theta}(t_{arrêt}) = 0 \rightarrow t_{arrêt} = \frac{mR\omega_0}{F}$

$2\pi = -\frac{\cancel{F}}{2\cancel{m}\cancel{R}} \frac{m^{\cancel{2}}R^{\cancel{2}}\omega_0^2}{F^{\cancel{2}}} + \frac{mR\omega_0^2}{F} = \frac{mR\omega_0^2}{2F} \Rightarrow F = \frac{mR\omega_0^2}{4\pi} = 12$ N

Exercice 4

1) quand $x \nearrow$, $J \nearrow$: en éloignant le curseur on modifie la répartition de la masse, celle-ci est plus éloignée de l'axe de rotation donc $J \nearrow$.

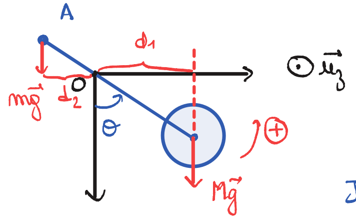
2) Système : { métronome }   Réf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids = $m\vec{g}$ + $M\vec{g}$

$m\vec{g}$ appliqué en A

$M\vec{g}$ appliqué en C

. $\vec{R}_{axe}$



<u>TMC scalaire selon Oz</u> : $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}(m\vec{p}) + \mathcal{M}_{Oz}(M\vec{g}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}_{ax})$

$=0$ car liaison pivot parfaite

$J\ddot{\theta} = -Mg\,d_1 + mg\,d_2$

bras de levier : $d_1 = \ell \sin\theta$ $\quad d_2 = x \sin\theta$ $\quad \Rightarrow J\ddot{\theta} = -g(M\ell - mx)\sin\theta$

$$\ddot{\theta} + g\frac{M\ell - mx}{J}\sin\theta = 0$$

3) On peut linéariser $\sin\theta \simeq \theta$ (petits angles) $\quad \ddot{\theta} + \underbrace{g\frac{M\ell - mx}{J}}_{\omega_0^2}\theta = 0$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{(M\ell - mx)g}}$$

4) 100 battements / min $\rightarrow$ 50 périodes / min $\rightarrow$ $T_0 = \frac{60}{50} = 1{,}2\,s$

5) $\searrow$ le nb de battements $\Leftrightarrow$ $\nearrow T_0$

$$T_0 = 2\pi\left(\frac{mx^2 + \frac{2}{5}mR^2 + M\ell^2}{gM\ell - gmx}\right)^{1/2} \nearrow \text{ si } x \text{ augmente}$$

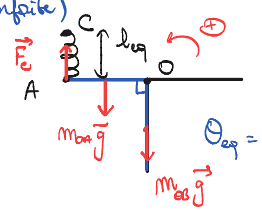
Exercice 5

1) <u>Système</u> : {Solide de masse M} $\qquad$ <u>Réf</u> : terrestre supposé galiléen

<u>BdF</u> : . poids (décomposé en 2 : $m_{OA}\vec{g} + m_{OB}\vec{g}$) $\qquad m_{OA} = m_{OB} = \frac{M}{2}$

. $\vec{R}_{axe}$ (liaison pivot parfaite)

. $\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$



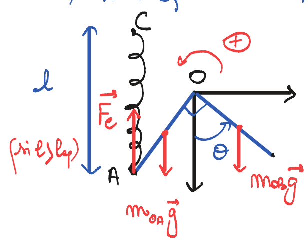
le sens de $\vec{F_e}$ se déduit de l'équilibre

A l'équilibre : $\sum \mathcal{M}_{Oz} = 0$

$$\sum \mathcal{M}_{Oz} = \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(m_{OA}\vec{g})}_{\frac{M}{2}a\,g} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(m_{OB}\vec{g})}_{0 \text{ car coupe l'axe de rotation}} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_e})}_{-k(\ell_{eq} - \ell_0)2a} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}_{axe})}_{0 \text{ car coupe l'axe (liaison pivot parfaite)}}$$

$$\frac{M}{2}g = 2k(\ell_{eq} - \ell_0) \rightarrow \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{Mg}{4k}$$

2) Hors équilibre : $\theta \neq \theta_{eq} = 0$



<u>TMC scalaire selon Oz</u> :

$$J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{Oz} \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = -\frac{M}{2}ga\sin\theta + \frac{M}{2}ga\cos\theta - k(\ell - \ell_0)2a\cos\theta$$

$$\ell = \ell_{eq} + 2a\sin\theta$$

$$4\frac{Ma^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{M}{2}ga\sin\theta + \cancel{\frac{M}{2}ga\cos\theta} - \left(\cancel{\frac{Mg}{4}} + 2ka\sin\theta\right)2a\cos\theta$$

$$4\frac{Ma^2}{3}\ddot{\theta} = -\left(\frac{M}{2}ga + 4ka^2\cos\theta\right)\sin\theta$$

<u>Approximation des petits angles</u> : $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$ (pour linéariser)

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{3k}{M} + \frac{3}{8}\frac{g}{a}\right)}_{\omega_0^2}\sin\theta = 0 \rightarrow T_0 = 2\pi\left(\frac{3k}{M} + \frac{3}{8}\frac{g}{a}\right)^{-1/2}$$

Exercice 6

1) a) <u>Système</u> : {rotor} $\qquad$ <u>Réf</u> : terrestre supposé galiléen

<u>BdF</u> : . $m\vec{g}$ appliqué en $G \in$ axe de rotation $\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = 0$

. couple moteur $\mathcal{M}_\Delta = C_m = kI$

. $\vec{R}_{axe}$ de moment nul en l'absence de frottements

<u>TMC scalaire selon Oz</u> : $J\frac{d\omega}{dt} = kI$

b) $\omega(t) = \frac{kI}{J}t$

c) $T_0 = 0{,}9\,s$

2) On rajoute les frottements : ⚠ moments < 0.

a) le TMC scalaire selon Oz devient : $J\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + kI - C_s$

b) Régime permanent $\omega = Cte$ $\quad \omega_p = \frac{kI - C_s}{\lambda} = 1800\ rad.s^{-1} \leftarrow \omega_0$

c) $T = 3\tau$ avec $\tau = \frac{J}{\lambda}$ $\quad T = 3{,}2\,s$ $\quad$ ($> T_0$, logique ...)

3) $J\frac{d\omega}{dt} = C_m(1+\eta\cos(\Omega t)) - \lambda\omega - C_s$

$\omega = \omega_0(1+\mathcal{E}(t))$ où $\omega_0 = \frac{C_m - C_s}{\lambda}$

$J\omega_0 \frac{d\mathcal{E}}{dt} = C_m + \eta C_m \cos(\Omega t) - \lambda\omega_0 - \lambda\omega_0\mathcal{E} - C_s$

$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \underbrace{\frac{C_m - C_s}{J\omega_0} - \frac{\lambda}{J}}_{=0} - \frac{\lambda}{J}\mathcal{E} + \frac{\eta}{J\omega_0} C_m \cos(\Omega t)$

$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\lambda}{J}\mathcal{E} = \frac{\eta}{J\omega_0} C_m \cos(\Omega t)$ $\quad (\tau = \frac{J}{\lambda})$

4) La solution homogène de la forme $\mathcal{E}(t) = A\exp(-t/\tau)$ tend rapidement vers 0

$\mathcal{E}(t) \simeq \mathcal{E}_p$ solution particulière de la forme $a\cos(\Omega t + \varphi)$ (RSF)

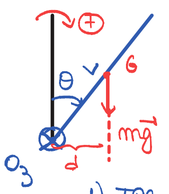
5) On passe en $\mathbb{C}$: $j\Omega\underline{\mathcal{E}} + \frac{1}{\tau}\underline{\mathcal{E}} = \frac{\eta}{J\omega_0} C_m e^{j\Omega t}$

$\underline{\mathcal{E}} = \frac{\frac{\eta}{J\omega_0} C_m e^{j\Omega t}}{1/\tau + j\Omega}$ $\quad a = |\underline{\mathcal{E}}| \rightarrow a = \frac{C_m\eta}{J\omega_0\sqrt{1/\tau^2 + \Omega^2}}$ $\quad a = \frac{C_m\eta}{\omega_0(\lambda^2 + J^2\Omega^2)}$

$\varphi = \arg(\underline{\mathcal{E}}) - \Omega t = -\arctan(\Omega\tau)$

6) Le volant d'inertie permet d'augmenter J et donc de diminuer l'amplitude des variations de $\omega(t)$.

Exercice 7



Système : {arbre} $\quad$ Rdf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids
. R_{axe} ← de moment supposé nul

1) TMC scalaire selon O_3 : $J\ddot{\theta} = mg\underbrace{\frac{L}{2}\sin\theta}_{d\text{ (bras de levier)}}$ $\quad$ ($\theta\nearrow$, θ n'est pas petit donc $\sin\theta \neq \theta$)

2) $J\ddot{\theta}\dot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}$

En intégrant entre $t=0$ et t : $\underset{\frac{mL^2}{3}}{J}\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -mg\frac{L}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Soit $\dot{\theta} = \left(\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right)^{1/2}$ $\quad (\dot{\theta} > 0)$

3) $dt = \frac{d\theta}{\left(\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right)^{1/2}}$ $\quad$ on intègre entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = \pi/2$ (au sol)

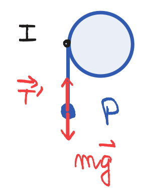
$T = \underbrace{\sqrt{\frac{L}{3g}}}_{\simeq 1}\underbrace{\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}d\theta}_{5,1 \text{ pour } \theta_0 = 5,1\text{ s}}$ $\quad T = 5,1\text{ s}$

Exercice 8

1) Le fil étant inextensible et tendu, tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. $v(M \text{ en contact avec le cylindre}) = v(M \in \text{fil "libre"}) \Leftrightarrow R\omega = \dot{z}$

2) Système : {masse m (P)} $\quad$ Rdf : terrestre supposé galiléen

BdF : . poids $m\vec{g}$
. tension du fil $\vec{T}'$

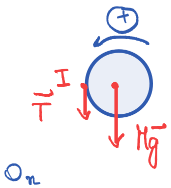


PFD : $m\ddot{z}\vec{u}_z = mg\vec{u}_z + \vec{T}' \Rightarrow \vec{T}' = m(\ddot{z} - g)\vec{u}_z$

- Action subie par le fil de la part du contrepoids : $-\vec{T}'$ en P (3° loi de Newton)
- Le fil est inextensible et de masse négligeable : la norme de la tension est la même en tout point du fil. $\vec{T}$ en I $= \vec{T}$ en P

$\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{u}_z$

3) Système : {cylindre}



BdF : . poids $\mathcal{M}_{O_x}(M\vec{g}) = 0$ car $M\vec{g}$ coupe l'axe O_x
. frottements de moment $\Gamma_f = -\lambda\omega$ par rapport à O_x
. tension en I de moment $\mathcal{M}_{O_x}(\vec{T}) = m(g - \ddot{z})R$

$J_{O_x}\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + mgR - mR^2\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J_{O_x} + mR^2}\omega = \frac{mgR}{J_{O_x} + mR^2}$

4) On peut poser $\tau = \dfrac{J_{\Delta} + mR^2}{\lambda}$ et $\omega_p = \dfrac{mgR}{\lambda}$ valeur de ω en régime permanent.

$\omega(t) = (\omega(0) - \omega_p)\exp(-t/\tau) + \omega_p$ $\quad$ $\omega \simeq \omega_p$ au bout de $5\tau \to$ régulateur

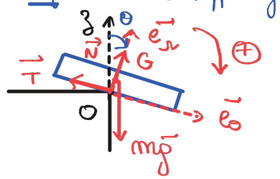
Rq : on retrouve la m̂ chose en étudiant le système {cylindre + contrepoids} avec $J_{\Delta,S} = J_{\Delta} + mR^2$, $\vec{T}$ est interne, elle n'intervient pas dans le bilan des forces mais il faut mettre $m\vec{g}$.

Exercice 9

1) Système : {tartine} $\quad$ Rdf : terrestre supposé galiléen

BdF : . $\vec{R}$

. $m\vec{g}$



$\otimes \vec{e_y}$

TMC scalaire selon Oy : $J_y \ddot{\theta} = mge\sin\theta$ $\quad$ $\ddot{\theta} = \dfrac{3ge}{a^2 + 4e^2}\sin\theta$

2) $\times\dot{\theta}$ et en intégrant : $\dfrac{\dot{\theta}^2}{2} = \dfrac{3ge}{a^2+4e^2}(\underbrace{\cos\theta(0)}_{1} - \cos\theta)$ $\quad$ $\eta = \dfrac{e}{a}$

$\to \omega^2 = \dfrac{6g\eta}{a(1+4\eta^2)}(1-\cos\theta)$

3) $\vec{a_G} = -e\dot{\theta}^2\vec{u_r} + e\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$ $\quad$ (tant que la tartine ne glisse pas)

4) $-me\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N$

$me\ddot{\theta} = mg\sin\theta + T$

5) $N = mg\cos\theta - m\dfrac{6g\eta^2}{1+4\eta^2}(1-\cos\theta) = -m\dfrac{6g\eta^2}{1+4\eta^2} + mg\left(1 + \dfrac{6\eta^2}{1+4\eta^2}\right)\cos\theta$

$T = m\dfrac{3ge^2}{a^2+4e^2}\sin\theta - mg\sin\theta = mg\sin\theta\left(\dfrac{3\eta^2}{1+4\eta^2} - 1\right)$ $\leftarrow = -\|\vec{T}\|$!

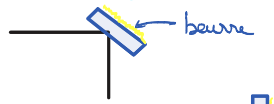
6) Condition de glissement $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$

$\underbrace{\left(-6mg\eta^2 + mg(1+6\eta^2)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}\, f = mg\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3\eta^2 + 1)$

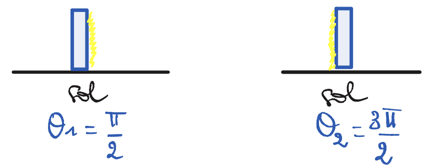
$mg\dfrac{\sqrt{2}}{2} f = mg\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-3\eta^2) \simeq mg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $f \simeq 1$

7) $\Omega = \dot{\theta}$ pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ $\Omega = \omega_0\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/2}$ $\quad$ $\omega_0^2 = \dfrac{6\eta g}{a(1+4\eta^2)}$

$\theta(t) = \dfrac{\pi}{4} + \Omega t$

8) 

La tartine retombe côté pain si $\theta(\text{sol}) < \pi/2$ ou si $\theta(\text{sol}) > \dfrac{3\pi}{2}$



9) Système : {G} $\quad$ BdF : $m\vec{g}$

a) $z_G(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$ $\to \tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ $\quad$ $\tau = 0{,}39\,s$

b) $\theta(\tau) = \dfrac{\pi}{4} + \left(\dfrac{6\eta g}{a(1+4\eta^2)}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{1/2} \times \tau = 3{,}3\,\text{rad}$ $\quad (\eta = 1/10)$

$\theta(\tau) = 189°$ $\quad$ $\theta_1 < \theta(\tau) < \theta_2$ $\to$ la tartine retombe sur le côté beurré !