Devoir surveillé n° 8

Durée : 3 heures

- ✓ *La calculatrice est autorisée*
- ✓ *Les réponses doivent être **justifiées**.*
- ✓ *Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.*
- ✓ ***Critères de présentation** : un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.*

Critère	***Indicateur***
Lisibilité de l'écriture	*L'écriture ne ralentit pas la lecture.*
Respect de la langue	*La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.*
Clarté de l'expression	*Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1ère lecture*
Propreté de la copie	*La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.*
Mise en évidence des résultats	*Résultats encadrés ou soulignés*
Identification des questions et pagination	*Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.*

Exercice 1 : Vaisseau spatial

On considère un vaisseau spatial supposé ponctuel, de masse m, initialement en orbite circulaire de rayon R_0 autour d'un astre de masse M, de rayon R et de centre O.

On se place dans le référentiel astrocentrique supposé galiléen. Le vaisseau a pour vitesse v_0 sur son orbite circulaire.

Q1. Rappeler l'expression de la vitesse v_0 d'un satellite sur l'orbite circulaire.

Q2. Etablir l'expression de son énergie mécanique.

On allume le moteur pendant un temps très court, de sorte que la vitesse du vaisseau varie mais pas la distance au centre de l'astre.

Q3. Déterminer la condition sur la vitesse v_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre, en fonction de la constante gravitationnelle G, M et R_0, puis en fonction de v_0 uniquement.

Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget » de vitesse Δv égal à 4 v_0. Cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesse n'excède pas Δv.

Option n°1 : le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant la vitesse à 5 v_0.

Q4. Evaluer en fonction de v_0 la vitesse « à l'infini », $v_{\infty 1}$, dans ce cas.

Option n°2 : le commandant utilise 1/8 ème du budget en commençant par ralentir le vaisseau de v_0 à $\frac{v_0}{2}$ en un temps très court devant la période de rotation, le vecteur vitesse gardant la même direction.

Q5. Décrire (en justifiant) la nouvelle trajectoire correspondant à l'option 2 et déterminer ses caractéristiques : demi-grand axe a, les distances r_A à l'apogée et r_P au périgée du vaisseau au centre O, les vitesses v_a à l'apogée et v_P au périgée. Quelle condition doit vérifier r_P ?

Q6. Le reste du budget est ensuite utilisé au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale « à l'infini », $v_{\infty 2}$, en fonction de v_0.

Q7. Comparer et commenter.

Exercice 2 : Orbite martienne

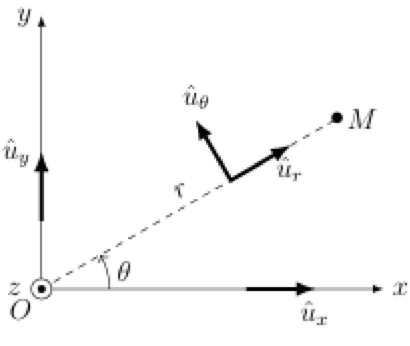
Ce problème décrit des notions connues depuis le XVIIe siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de Kepler et Newton).

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. On donne les constantes suivantes :

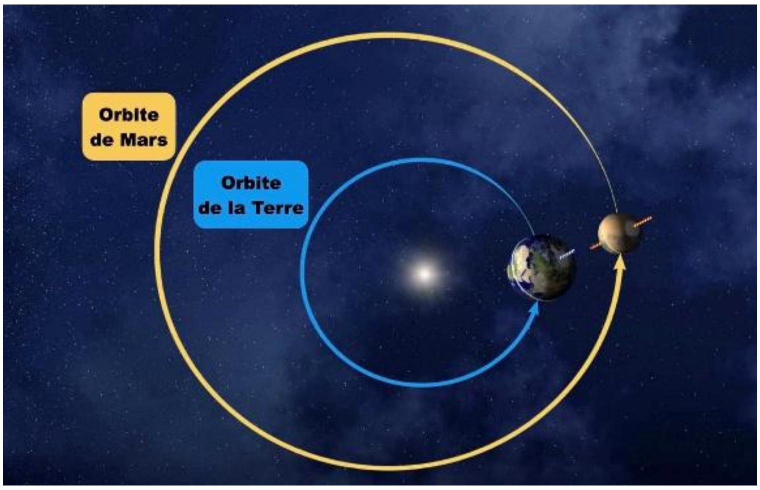
<u>Données numériques :</u>

Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
Distance Terre Soleil : $a_0 = 1.50 \times 10^8\ km$
Masse du Soleil : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Rayon du Soleil : $R_S = 6{,}96 \times 10^8\ km$
Rayon de la planète Terre : $R_T = 6400\ km$
Période de révolution de la Terre : $T_0 = 365\ j$
Période de révolution de Mars : $T_0 = 687\ j$

On note $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ, z d'un point M situé dans le plan (Oxy).



Ce problème est consacré aux lois de Kepler et à une mesure historique de l'unité astronomique par Cassini (1672). On notera que ces travaux sont tous deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par Newton (1687). On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.



On note $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel d'étude (R_0).

Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen (R_0), le mouvement d'un astre assimilé à un point M de masse m sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur A de masse M_A et de centre fixe O. On notera $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}, \boldsymbol{r} = ||\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}||$ et $\vec{\boldsymbol{r}} = r\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}_r}$.

Q8. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer O comme fixe ? Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\vec{\boldsymbol{F}}$ exercée par l'astre sur la planète si les deux astres sont assimilés à des points ?

Q9. Montrer que le mouvement de M est plan et préciser ce plan ; on supposera que $\overrightarrow{\boldsymbol{u}_z}$ est orthogonal à ce plan.

Q10. Définir la constante C , appelée constante des aires, issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires seulement (r, θ) du mouvement de M dans (Oxy) et éventuellement leurs dérivées temporelles.

Q11. Mettre l'énergie mécanique E_m de la planète sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ et donner l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$.

Q12. Tracer l'allure de $E_{p,eff}(r)$ lorsque la constante des aires C n'est pas nulle.

Q13. Différencier les types de mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique.

Q14. Exprimer (à l'aide du principe fondamental de la dynamique et de la dérivée de la fonction composée) $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ puis en déduire que :

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\theta) = \frac{C\,(\overrightarrow{\boldsymbol{u}_\theta} + \vec{\boldsymbol{e}})}{p}$$

où $\vec{\boldsymbol{e}}$ est une constante (vectorielle) d'intégration que l'on de déterminera pas et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, M et de la constante de gravitation G. Quelle est la dimension physique de $\vec{\boldsymbol{e}}$?

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{\boldsymbol{e}} = e\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}_y}$ avec $e = ||\vec{\boldsymbol{e}}|| > 0$, une grandeur appelée excentricité.

Q15. Exprimer $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ.

Q16. En déduire r en fonction de p, e et θ.

Q17. A quelle condition sur e le mouvement est-il borné ? Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ?

On admettra que le mouvement est périodique de période T.

Q18. Montrer que T se met sous la forme suivante : $T = K \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$, où K est une constante que l'on exprimera en fonction de p, M_A et G.

Q19. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des lois de Kepler et préciser laquelle.

Nous admettrons dans cette partie pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de Copernic, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1, de périodes respectives T_0 et T_1.

Le principe de la mesure de a_0 proposée par Cassini, à la fin du XVIIe siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $L = 7\,070\ km$) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance minimale de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris -Mars et Cayenne – Mars).

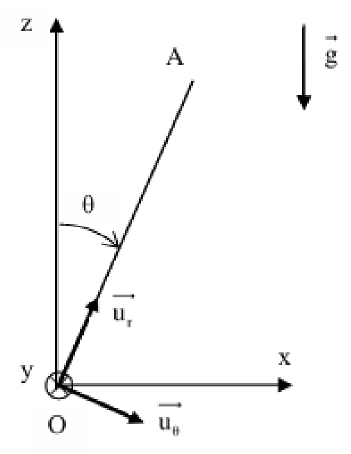
Q20. Sans soucis d'échelle, représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0, a_1, α au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre). On supposera les 2 observatoires situés en positions symétriques par rapport à l'axe Soleil – Terre – Mars.

Q21. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction uniquement de T_0 et T_1, L et α. On exprimera a_0.

Q22. La valeur de α annoncée par Cassini était de 14" (secondes d'angle). En déduire la valeur de l'unité astronomique selon Cassini.

Exercice 3 : Dynamitage d'une cheminée

On assimile une cheminée à une tige homogène OA de masse M et de longueur L. On dynamite sa base (point O) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point O, bloquée par les d´débris de l'explosion ; on note Oz la verticale ascendante, zOx le plan de chute et $\theta(t)$ l'angle que fait OA avec Oz à l'instant t. Le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe Oy est $J = \frac{1}{3} ML^2$. On note g l'intensité de la pesanteur.



La liaison pivot est parfaite L'action du sol sur la cheminée se résume à une force $\vec{R}$ appliquée en O de composante radiale et orthoradiale, R_r et R_θ.

Au moment de l'explosion pris à $t = 0$, on a $\theta \approx 0$ et $\dot{\theta} \approx 0$.

Q23. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

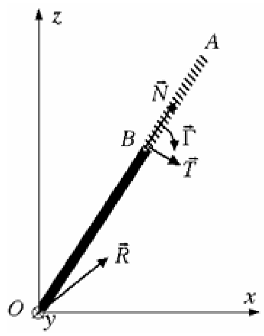
Q24. En déduire l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes du problème.

Q25. Exprimer en fonction de θ les composantes R_r et R_θ de la réaction en O.

La cheminée est composée de briques qui exercent des actions les unes sur les autres. Si ces actions internes deviennent trop importantes, la cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute.

On considère la cheminée avant la rupture, constituée par les parties OB et BA, avec $OB = x$ une longueur arbitraire dans l'intervalle $[0, L]$, comme représentée ci-dessous. Les deux parties ont été représentées différemment pour mieux les visualiser, mais la cheminée est encore considérée comme homogène.

La portion OB de la cheminée de longueur x et de masse m subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en B. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en B n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la partie OB est modélisée par une force $\vec{F} = N\,\overrightarrow{u_r} + T\,\overrightarrow{u_\theta}$ appliquée en B et un couple de flexion porté par l'axe Oy $\vec{\Gamma} = \Gamma\,\overrightarrow{u_y}$. N, T et Γ traduisent respectivement les efforts de compression, de cisaillement et de flexion qui s'exercent sur la partie OB du fait de la partie BA. En particulier, la cheminée n'est pas conçue pour résister à des efforts de cisaillement ou de flexion trop importants.



Q26. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur x de cheminée, établir l'expression de T, appelée effort de cisaillement, en fonction de M, g, x, θ et L.

Q27. Montrer que le théorème du moment cinétique en O, appliqué à la longueur x de cheminée conduit à l'expression suivante du moment du couple de flexion Γ :

$$\Gamma = -\frac{1}{4} M\,g\,x \sin\theta\,\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2$$

Q28. En déduire que, dans ce modèle, la rotation de la cheminée provoque une augmentation des efforts de cisaillement et de flexion.

Q29. Tracer les graphes de T et de Γ en fonction du rapport $\frac{x}{L}$, pour θ donné.

Q30. En perdant sa rigidité, la cheminée aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement est le plus important. Quel est ce point ?

Q31. Si le couple de flexion est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ?

Q32. Commenter à ce sujet les deux photographies ci-suivantes.

FIN