Correction DS8

Exercice 1

Q1. $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}}$

Q2. $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R_0}$ $\boxed{E_m = -\frac{GmM}{2R_0}}$

Q3. Cas limite : $E_m = 0$ $\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_0} = 0$ $\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} = \sqrt{2}\, v_0}$

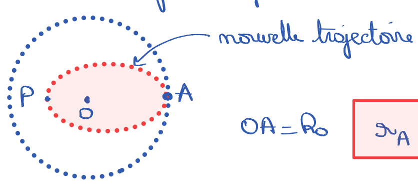
Q4 <u>Option 1</u> : $v_0' = 5 v_0$ vitesse à la position $r = R_0$

Conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2} m v_0'^2 - \underbrace{\frac{GmM}{R_0}}_{m v_0^2} = \frac{1}{2} m v_{\infty_1}^2$ $v_{\infty_1} = v_0'^2 - 2 v_0^2 = 23 v_0^2$

$\boxed{v_{\infty_1} = \sqrt{23}\, v_0}$

Q5. A $r = R_0$ $v_0' = \frac{v_0}{2}$ $\Rightarrow E_m < E_m$ (cercle) donc toujours négative : la trajectoire est une ellipse.

On a $\vec{v_0'} \perp \vec{OM}$ et $v_0' < v_0$:



$OA = R_0$ $\boxed{r_A = R_0}$

<u>Conservation de l'énergie mécanique</u> :

$$-\frac{GmM}{2a} = \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GmM}{R_0} = m\left(\frac{v_0'^2}{2} - v_0^2\right) = -m\, 7\frac{v_0^2}{8} = -\frac{7}{8}\frac{GmM}{R_0}$$ $\boxed{a = \frac{4R_0}{7}}$

$\underbrace{2a}_{8R_0/7} = r_A + r_P$ $\boxed{r_P = \frac{R_0}{7}}$ <u>il faut $r_P > R$</u> (rayon de l'astre)

<u>Conservation du moment cinétique</u> $L_O = Cte \Rightarrow$ en A et P : $m \underset{R_0}{r_A} \underset{\frac{v_0}{2}}{v_A} = m \underset{\frac{R_0}{7}}{r_P} v_P$

$\boxed{v_A = \frac{v_0}{2}}$ $\boxed{v_P = \frac{7}{2} v_0}$

Q6. le budget "vitesse" restant est $\frac{7}{2} v_0$. La vitesse en $r = r_P = \frac{R_0}{7}$ devient $v_0' = 7 v_0$.

$E_m = \frac{1}{2} m\, 49 v_0^2 - 7\frac{GmM}{R_0} = \frac{1}{2} m\, 35 v_0^2 > 0$ la trajectoire est une <u>hyperbole</u>.

$\frac{1}{2} m v_{\infty_2}^2 = \frac{1}{2} m\, 35 v_0^2 \Rightarrow$ $\boxed{v_{\infty_2} = \sqrt{35}\, v_0}$

Q7. $v_{\infty,2} > v_{\infty,1}$ la 2° méthode est plus efficace (mais + coûteuse en énergie...)

Exercice 2

Q8 le point O peut être considéré fixe si $\boxed{M_A \gg m}$.

$O \xrightarrow{\ r\ } M \quad \vec{u}_r$ $\qquad \boxed{\vec{F} = -G\dfrac{M_A m}{r^2}\vec{u}_r}$

Q9 $\vec{F}$ est une force centrale donc son moment en O est nul : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{\text{colinéaires}} = \vec{0}$

Système : {planète}

Référentiel : R_0

BdF : force de gravitation

TMC en O : $\left(\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R_0} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ donc $\boxed{\vec{L}_O = \vec{Cte}}$

$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$ par propriété du produit vectoriel : $\boxed{\vec{L}_O \perp \vec{OM} \text{ et } \vec{v}(M)}$

Comme $\vec{L}_O$ est un vecteur constant, $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$ sont $\perp$ à tout instant à une même direction (celle de $\vec{L}_O$) : le mouvement est donc plan, dans le plan $\perp$ à $\vec{L}_O$ et contenant O.

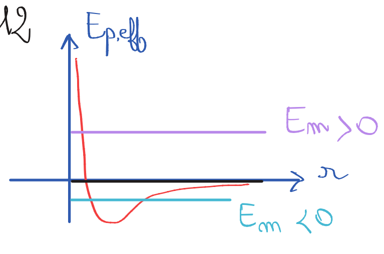
Q10. le plan de la trajectoire est $\perp$ à l'axe O_z : $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z}$

$mr^2\dot{\theta} = Cte$ On définit la constante des aires : $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$ Vitesse aréolaire : $\dfrac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \dfrac{C}{2}$

Q11 $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$ $\qquad E_p(r) = -G\dfrac{M_A m}{r}$ $\qquad v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \dfrac{C^2}{r^2}$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{mM_A}{r}}_{E_{p,eff}(r)}}$$

Q12



Q13 • $E_m < 0$: état lié $\rightarrow$ ellipse

• $E_m > 0$: état de diffusion $\rightarrow$ hyperbole

$E_m = 0$: état de diffusion $\rightarrow$ parabole

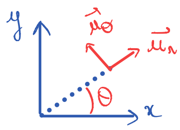
Q14. PFD $\Rightarrow m\frac{d\vec v}{dt} = -Gm\frac{M_A}{r^2}\vec u_r$ $\quad \frac{d\vec v}{dt} = -G\frac{M_A}{r^2}\vec u_r$

$\frac{d\vec v}{d\theta}\times\dot\theta = -G\frac{M_A}{r^2}\vec u_r$ $\quad \frac{d\vec v}{d\theta} = -G\frac{M_A}{r^2\dot\theta}\vec u_r = -G\frac{M_A}{C}\vec u_r$ $\quad d\vec v = -\frac{GM_A}{C}d\theta\,\vec u_r$

or $d(\vec u_\theta) = -d\theta\,\vec u_r$ $\quad \vec v = \frac{GM_A}{C}\vec u_\theta + \vec{Cte}$

On pose $\frac{C}{p} = \frac{GM_A}{C} \Rightarrow \boxed{p = \frac{C^2}{GM_A}}$ et $\vec{Cte} = \frac{\vec e C}{p} \Rightarrow \boxed{\vec v = \frac{C(\vec u_\theta + \vec e)}{p}}$ $\quad \|\vec e\|$ est sans dimension

Q15. $\vec v = \dot r\vec u_r + r\dot\theta\vec u_\theta$ $\quad \vec e = e\vec u_y = e\cos\theta\,\vec u_\theta + e\sin\theta\,\vec u_r$



Selon $\vec u_r$: $\boxed{\dot r = \frac{C}{p}e\sin\theta}$ (1)

Selon $\vec u_\theta$: $\boxed{r\dot\theta = \frac{C}{p}(1+e\cos\theta)}$ (2)

Q16 (2) $\Rightarrow \dot\theta = \frac{C}{r^2}$ $\quad r\frac{C}{r^2} = \frac{C}{p}(1+e\cos\theta)$ $\quad \boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$

Q17. $r>0$ et borné si $1+e\cos\theta \neq 0$, $\cos\theta\in[-1,1]$. Il faut $1-e>0$ soit $\boxed{e>1}$, c'est une ellipse.

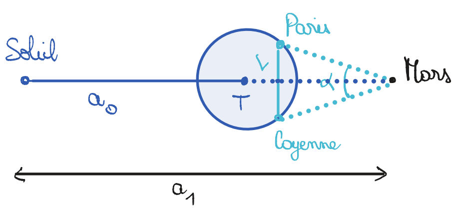
Q18 $\dot\theta = \frac{C}{r^2}$ $\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{C(1+e\cos\theta)^2}{p^2}$ $\quad C = \sqrt{pGM_A}$ $\rightarrow dt = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM_A}}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

On intègre entre $t=0$ $(\theta=0)$ et $t=T$ $(\theta=2\pi)$: $\boxed{T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM_A}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta}$

Q19. $e=0$ (cercle) $\quad T = 2\pi\frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM_A}}$ $\quad$ et $R=p$

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_A}}R^{3/2}}$ $\quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_A}R^3$: 3° loi de Kepler

Q20



Q21 $\frac{T_0^2}{T_1^2} = \frac{a_0^3}{a_1^3}$ $\quad \frac{L}{2} = x\tan\frac{\alpha}{2}$ $\quad x = a_1 - a_0 - y$ $\leftarrow \left(R_T^2 - \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}$ négligeable devant $a_1 - a_0$

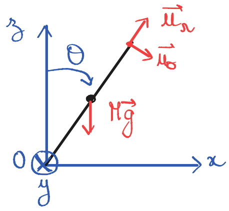
$a_0\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3}$

$\frac{L}{2\tan\alpha/2} = a_0\left(\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} - 1\right)$ $\quad \boxed{a_0 = \frac{L}{2\tan\frac{\alpha}{2}\left((T_1/T_0)^{2/3} - 1\right)}}$

Q22 AN: $\boxed{a_0 = 198\times10^6\ km}$

Exercice 3

Q23. Système : {cheminée}



Référentiel : terrestre supposé galiléen

BdF : • poids $M\vec{g}$

• liaison pivot en O : $\vec{R} = R_r\vec{u}_r + R_\theta \vec{u}_\theta$ (idéale)

TMC scalaire selon Oy : $J\ddot{\theta} = Mg\frac{L}{2}\sin\theta$ $\quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta}$

Q24 $\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$ on intègre entre $t=0$ ($\theta=0$) et t (θ quelconque)

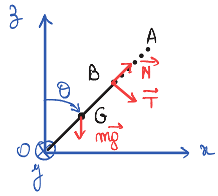
$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(1-\cos\theta)}$$

Q25 Théorème de la résultante cinétique : $M\vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{R}$

Dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: $-M\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = -Mg\cos\theta + R_r \rightarrow R_r = Mg\cos\theta - \frac{3}{2}Mg(1-\cos\theta)$ $\quad \boxed{R_r = Mg\left(\frac{5}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\right)}$

$M\frac{L}{2}\ddot{\theta} = Mg\sin\theta + R_\theta \rightarrow R_\theta = \frac{3}{4}Mg\sin\theta - Mg\sin\theta$ $\quad \boxed{R_\theta = -\frac{1}{4}Mg\sin\theta}$

Q26. Système : {portion OB}



Référentiel : terrestre supposé galiléen

BdF : • poids $m\vec{g}$

• liaison pivot en O : $\vec{R} = R_r\vec{u}_r + R_\theta\vec{u}_\theta$ (idéale)

• action $\vec{F} = N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta$

• couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_y$

$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{N} + \vec{T}$ $\quad$ Selon $\vec{u}_\theta$: $m\frac{x}{2}\ddot{\theta} = T + R_\theta + mg\sin\theta \Rightarrow T = m\frac{x}{2}\ddot{\theta} - R_\theta - mg\sin\theta$

$T = m\frac{x}{2}\,\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{1}{4}Mg\sin\theta - mg\sin\theta$ $\quad m = \frac{M}{L}x$ car la cheminée est supposée homogène

$T = \frac{3}{4}M\frac{x^2}{L^2}g\sin\theta + \frac{1}{4}Mg\sin\theta - \frac{M}{L}gx\sin\theta$ $\quad \boxed{T = Mg\sin\theta\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{L} + \frac{3}{4}\frac{x^2}{L^2}\right)}$

Q27. On applique le TMC scalaire selon Oy à la portion OB : $\overset{1/3\,mx^2}{J_{OB}}\ddot{\theta} = mg\frac{x}{2}\sin\theta + \Gamma + Tx$

$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$ $\quad \Gamma = \frac{1}{3}\frac{M}{L}x^3 \times \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{M}{L}g\frac{x^2}{2}\sin\theta - Mg\sin\theta\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{L} + \frac{3}{4}\frac{x^2}{L^2}\right)x$

$\Gamma = Mg\sin\theta\left(\frac{x^3}{2L^2} - \frac{x^2}{2L} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{L} - \frac{3}{4}\frac{x^3}{L^2}\right)$ $\quad \Gamma = -Mg\sin\theta\, x\left(\frac{x^2}{4L^2} - \frac{x}{2L} + \frac{1}{4}\right)$

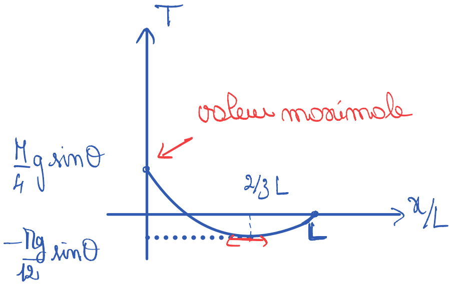
$$\Gamma = -\frac{Mg\sin\theta}{4}\, x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2$$

Q28. $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin\theta$ est croissante sur cet intervalle donc Tet $|\Gamma|$ augmentent avec la rotation.

Q29. • $T(0) = \frac{M}{4} g \sin\theta$ $\quad T(L) = 0$

$$\frac{dT}{dx} = Mg\sin\theta \left(\frac{3}{2}\frac{x}{L^2} - \frac{1}{L} \right)$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \iff -\frac{1}{L} + \frac{3}{2}\frac{x}{L^2} = 0 \quad \boxed{x = \frac{2}{3}L} \leftarrow \text{minimum}$$



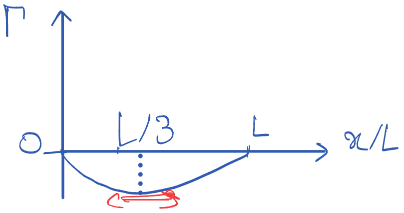
x	0		2/3		L
$\frac{dT}{dx}$		⊖	0	⊕	
$T(x)$		↘		↗	

$T(x = \frac{2}{3}L)$ minimum

• $\Gamma(0) = 0 \quad \Gamma(L) = 0$

$$\frac{d\Gamma}{dx} \propto \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 + 2x\left(\frac{x}{L} - 1\right)\frac{1}{L} = \left(\frac{x}{L} - 1\right)\left(\frac{x}{L} - 1 + \frac{2x}{L}\right)$$

$$\frac{d\Gamma}{dx} = 0 \iff x = L \ (\Gamma = 0) \text{ ou } \boxed{x = \frac{L}{3}} \leftarrow |\Gamma| \text{ maximum}$$



Q30. L'effort de cisaillement est maximal en $x = 0$, à la base

Q31 L'effort de flexion est maximal en $x = L/3$.

Q32 Photo à gauche : la rupture semble être due à la flexion (Γ maximum), $x(\text{brisure}) \neq \frac{L}{3}$ mais la cheminée semble non cylindrique

Photo à droite : la rupture semble être due au cisaillement car x (brisure) proche de la base.