

# Correction DS8

## Exercice 1

Q1 .  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$

Q2.  $E_{m0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R_0}$        $E_{m1} = - \frac{GMm}{2R_0}$

Q3. Cas limite :  $E_{m1} = 0$        $\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_0} = 0$        $v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} = \sqrt{2} \sigma_0$

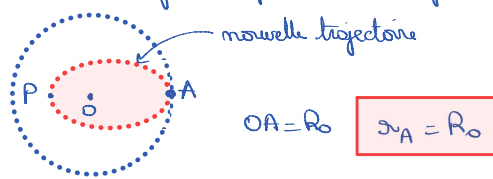
Q4 Option 1 :  $v_0' = 5v_0$  vitesse à la position  $r = R_0$

Conservation de l'énergie mécanique :  $\frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GMm}{R_0} = \frac{1}{2} m v_{\infty 1}^2$        $v_{\infty 1} = v_0'^2 - 2v_0^2 = 23v_0^2$

$v_{\infty 1} = \sqrt{23} v_0$

Q5. A  $r = R_0$   $v_0' = \frac{v_0}{2} \Rightarrow E_{m1} < E_{m0}$  (circulaire) donc toujours négative : la trajectoire est une ellipse.

On a  $\vec{v}_0' \perp \vec{OA}$  et  $v_0' < v_0$  :



Conservation de l'énergie mécanique :

$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GMm}{R_0} = m \left( \frac{v_0'^2}{2} - v_0^2 \right) = -m \frac{7v_0^2}{8} = -\frac{7}{8} \frac{GMm}{R_0}$        $a = \frac{4R_0}{7}$

$\frac{2a}{8R_0/7} = r_A + r_P$

$r_P = \frac{R_0}{7}$

le fait  $r_P > R$  (rayon de l'astre)

Conservation du moment cinétique

$L_0 = Cte \Rightarrow$  en A et P :  $m r_A v_A = m r_P v_P$

$v_A = \frac{v_0}{2}$

$v_P = \frac{7}{2} v_0$

Q6. le budget "vitesse" restant est  $\frac{7}{2} v_0$ . La vitesse en  $r = r_P = \frac{R_0}{7}$  devient  $v_1' = 7v_0$ .

$E_{m1} = \frac{1}{2} m (7v_0)^2 - \frac{7GMm}{R_0} = \frac{1}{2} m 35v_0^2 > 0$  la trajectoire est une hyperbole.

$\frac{1}{2} m v_{\infty 2}^2 = \frac{1}{2} m 35v_0^2 \Rightarrow v_{\infty 2} = \sqrt{35} v_0$

Q7.  $v_{\infty 2} > v_{\infty 1}$  la 2<sup>e</sup> méthode est plus efficace (moins + coûteuse en énergie...)

## Exercices 2

Q8 le point O peut être considéré fixe si  $M_A \gg m$ .

$$O \xrightarrow{r} M \xrightarrow{\vec{u}_r}$$

$$\vec{F} = -G \frac{M_A m}{r^2} \vec{u}_r$$

Q9  $\vec{F}$  est une force centrale donc son moment en O est nul :  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$   
↙  
colinéaires

Système : {planète}

Référentiel :  $R_0$

Bdf : force de gravitation

TMC en O :  $\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$  donc  $\vec{L}_0 = C\vec{e}$

$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$  par propriété du produit vectoriel :  $\vec{L}_0 \perp \vec{OM}$  et  $\vec{v}(M)$

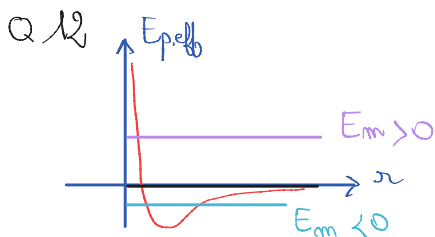
Comme  $\vec{L}_0$  est un vecteur constant,  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}(M)$  sont  $\perp$  à tout instant si une même direction (celle de  $\vec{L}_0$ ) : le mouvement est donc plan, dans le plan  $\perp$  à  $\vec{L}_0$  et contenant O.

Q10. le plan de la trajectoire est  $\perp$  à l'axe  $Oz$  :  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  et  $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$

$m r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$  On définit la constante des aires :  $C = r^2 \dot{\theta}$  Vitesse azimutale :  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$

Q11  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r)$   $E_p(r) = -G \frac{M_A m}{r}$   $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m C^2}{2 r^2} - G \frac{m M_A}{r}}_{E_{p, \text{eff}}(r)}$$



Q13.  $E_m < 0$  : état lié  $\rightarrow$  ellipse

$E_m > 0$  : état de diffusion  $\rightarrow$  hyperbole

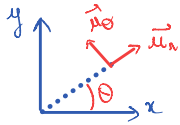
$E_m = 0$  : état de diffusion  $\rightarrow$  parabole

Q14. PFD  $\Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = -Gm \frac{M_A}{r^2} \vec{u}_r \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{M_A}{r^2} \vec{u}_r$   
 $\frac{d\vec{v}}{d\theta} \times \dot{\theta} = -G \frac{M_A}{r^2} \vec{u}_r \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -G \frac{M_A}{r^2 \dot{\theta}} \vec{u}_r = -G \frac{M_A}{c} \vec{u}_r \quad d\vec{v} = -\frac{GM_A}{c} d\theta \vec{u}_r$

ou  $d(\vec{u}_\theta) = -d\theta \vec{u}_r \quad \vec{v} = \frac{GM_A}{c} \vec{u}_\theta + \vec{C}_e$

On pose  $\frac{c}{p} = \frac{GM_A}{c} \Rightarrow p = \frac{c^2}{GM_A}$  et  $\vec{C}_e = \frac{\vec{c}}{p} \Rightarrow \vec{v} = \frac{c(\vec{u}_\theta + \vec{e})}{p}$   $\|\vec{e}\|$  est sans dimension

Q15.  $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \vec{u}_r \quad \vec{e} = e \vec{u}_y = e \cos\theta \vec{u}_\theta + e \sin\theta \vec{u}_r$



Selon  $\vec{u}_r$ :  $r\dot{\theta} = \frac{c}{p} e \sin\theta$  (1)

Selon  $\vec{u}_\theta$ :  $r\dot{\theta} = \frac{c}{p} (1 + e \cos\theta)$  (2)

Q16 (2)  $\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \quad r \frac{c}{r^2} = \frac{c}{p} (1 + e \cos\theta) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos\theta}$

Q17.  $r > 0$  et borné si  $1 + e \cos\theta \neq 0, \cos\theta \in [-1, 1]$ . Il faut  $1 - e > 0$  soit  $e < 1$ , c'est une ellipse.

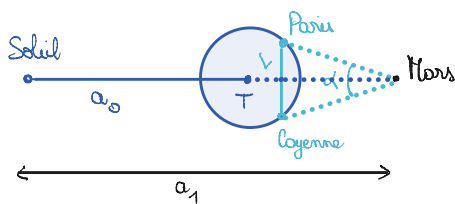
Q18.  $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{c(1 + e \cos\theta)^2}{p^2} \quad c = \sqrt{p GM_A} \quad \rightarrow dt = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM_A}} \frac{d\theta}{(1 + e \cos\theta)^2}$

On intègre entre  $t=0$  ( $\theta=0$ ) et  $t=T$  ( $\theta=2\pi$ ):  $T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM_A}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos\theta)^2} d\theta$

Q19.  $e=0$  (cercle)  $T = 2\pi \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM_A}}$  et  $R=p$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_A}} R^{3/2} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_A} R^3$  : 3<sup>e</sup> loi de Kepler

Q20



Q21.  $\frac{T_0^2}{T_1^2} = \frac{a_0^3}{a_1^3} \quad \frac{L}{2} = a \tan \frac{\alpha}{2} \quad a = a_1 - a_0 - y \left( R_T^2 - \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}$  négligeable devant  $a_1 a_0$   
 $a_0 \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} = a_1 - a_0 - y \left( R_T^2 - \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}$

$\frac{L}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} = a_0 \left( \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} - 1 \right)$

$a_0 = \frac{L}{2 \tan \frac{\alpha}{2} \left( \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} - 1 \right)}$

Q22. AN:  $a_0 = 1.98 \times 10^9 \text{ km}$

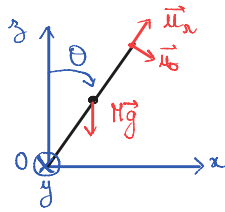
### Exercice 3

Q23. Système: {cheminée}

Référentiel: terrestre supposé galiléen

Bdf: • poids  $M\vec{g}$

• liaison pivot en O:  $\vec{R} = R_n \vec{u}_n + R_o \vec{u}_o$  (libre)



TMC selon Oy:  $J\ddot{\theta} = Mg \frac{L}{2} \sin\theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin\theta$$

Q24  $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin\theta$  on intègre entre  $t=0$  ( $\theta=0$ ) et  $t$  ( $\theta$  quelconque)

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{3g}{2L} (1 - \cos\theta) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos\theta)$$

Q25 Théorème de la résultante cinétique:  $M \vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{R}$

Dans  $(\vec{u}_n, \vec{u}_o)$ :  $-M \frac{L}{2} \ddot{\theta} = -Mg \cos\theta + R_n \Rightarrow R_n = Mg \cos\theta - \frac{3}{2} Mg (1 - \cos\theta)$

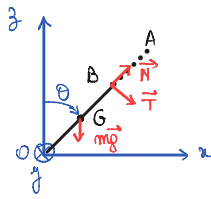
$$R_n = Mg \left( \frac{5}{2} \cos\theta - \frac{3}{2} \right)$$

$$M \frac{L}{2} \ddot{\theta} = Mg \sin\theta + R_o \Rightarrow R_o = \frac{3}{4} Mg \sin\theta - Mg \sin\theta$$

$$R_o = -\frac{1}{4} Mg \sin\theta$$

Q26 Système: {partie OB}

Référentiel: terrestre supposé galiléen



Bdf: • poids  $m\vec{g}$

• liaison pivot en O:  $\vec{R} = R_n \vec{u}_n + R_o \vec{u}_o$  (libre)

• action  $\vec{F} = N \vec{u}_n + T \vec{u}_o$

• couple  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_y$

$$m \vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{N} + \vec{T}$$

Selon  $\vec{u}_o$ :  $m \frac{x}{2} \ddot{\theta} = T + R_o + mg \sin\theta \Rightarrow T = m \frac{x}{2} \ddot{\theta} - R_o - mg \sin\theta$

$$T = m \frac{x}{2} \left( \frac{3g}{2L} \sin\theta + \frac{1}{4} Mg \sin\theta - mg \sin\theta \right)$$

$$mv = \frac{M}{L} x \quad \text{car la cheminée est supposée homogène}$$

$$T = \frac{3}{4} M \frac{x^2}{L^2} g \sin\theta + \frac{1}{4} Mg \sin\theta - \frac{M}{L} g x \sin\theta$$

$$T = Mg \sin\theta \left( \frac{1}{4} - \frac{x}{L} + \frac{3}{4} \frac{x^2}{L^2} \right)$$

Q27. On applique le TMC selon  $Oy$  à la partie OB:  $J_{OB} \ddot{\theta} = mg \frac{x}{2} \sin\theta + \Gamma + Tx$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin\theta \quad \Gamma = \frac{1}{3} M \frac{x^3}{L} \times \frac{3g}{2L} \sin\theta - \frac{M}{L} g \frac{x^2}{2} \sin\theta - Mg \sin\theta \left( \frac{1}{4} - \frac{x}{L} + \frac{3}{4} \frac{x^2}{L^2} \right) x$$

$$\Gamma = Mg \sin\theta \left( \frac{x^3}{2L^2} - \frac{x^2}{2L} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{L} - \frac{3}{4} \frac{x^3}{L^2} \right) \quad \Gamma = -Mg \sin\theta x \left( \frac{x^2}{4L^2} - \frac{x}{2L} + \frac{1}{4} \right)$$

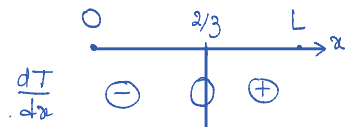
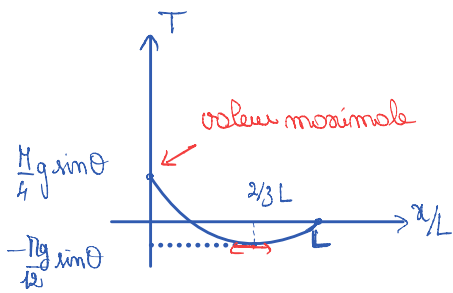
$$\Gamma = -\frac{Mg \sin\theta}{4} x \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^2$$

Q28.  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$   $\sin \theta$  est croissant sur cet intervalle donc T et | $\Gamma$ | augmentent avec la rotation.

Q29.  $T(0) = \frac{H}{4} g \sin \theta$   $T(L) = 0$

$$\frac{dT}{dx} = Hg \sin \theta \left( \frac{3}{2} \frac{x}{L^2} - \frac{1}{L} \right)$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{L} + \frac{3}{2} \frac{x}{L^2} = 0 \quad \boxed{x = \frac{2}{3} L} \leftarrow \text{minimum}$$

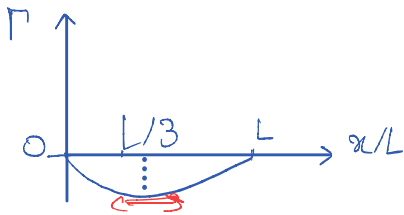


$T(x) \searrow \quad \uparrow$   $T(x = \frac{2}{3} L)$  minimum

$\Gamma(0) = 0$   $\Gamma(L) = 0$

$$\frac{d\Gamma}{dx} \propto \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^2 + 2x \left[ \frac{x}{L} - 1 \right] \frac{1}{L} = \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \left( \frac{x}{L} - 1 + \frac{2x}{L} \right)$$

$$\frac{d\Gamma}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = L (\Gamma = 0) \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{L}{3}} \leftarrow |\Gamma| \text{ maximum}$$



Q30. L'effet de cisaillement est maximal en  $x=0$ , à la base

Q31. L'effet de flexion est maximal en  $x = L/3$ .

Q32. Photo à gauche: la rupture semble être due à la flexion ( $\Gamma$  maximum),  $x$  (brisure)  $\neq \frac{L}{3}$  mais la cheminée semble non cylindrique

Photo à droite: la rupture semble être due au cisaillement car  $x$  (brisure) proche de la base.