TD11: Logique
Correction

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Exercice 4.

Forme normale disjonctive

Question 1. La table de vérité explicite est :

X_0	X_1	X_2	φ
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

D'où :

a) $T_{5,1} = 0$: la ligne 5 est celle dont les trois premières valeurs sont 101.
b) $T_{3,2} = 0$: la ligne 3 commence par 110 (le chiffre des unités est à gauche).
c) $T_{3,3} = 1$: la ligne 3 a 1 pour valeur de φ.
d) $l_{5,1} = \neg X_1$ car la ligne 5 a un 0 en colonne 1.
e) $l_{3,2} = \neg X_2$.
f) σ_3 est la valuation $X_0 \mapsto 1, X_1 \mapsto 1, X_2 \mapsto 0$.
g) σ_7 est la valuation constante égale à 1.

Question 2. Les valuations $(\sigma_i)_{i \in [\![0, 2^n-1]\!]}$ couvrent les 2^n possibilités. On peut même expliciter l'indice i vérifiant $\sigma_i = \sigma$, il suffit de prendre

$$i = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma(X_j) 2^j$$

par définition, σ_i est la valuation qui à chaque X_j associe le j-ème bit de i, c'est à dire $\sigma(X_j)$. D'où $\sigma_i = \sigma$.

Question 3. $[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_i} = 1$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $l_{i,j} = X_j$ et $\sigma_i(X_j) = 1$
2. $l_{i,j} = \neg X_j$ et $\sigma_i(X_j) = 0$

Or, $l_{i,j} = X_j$ si et seulement si i admet un 1 en j-ème bit, si et seulement si $\sigma_i(X_j) = 1$. Donc, peu importe si $\sigma_i(X_j)$ vaut 0 ou 1, l'une des conditions ci-dessus est forcément vérifiée, et donc $[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_i} = 1$.

Question 4. $[\![C_i]\!]^{\sigma_i} = 1$ si et seulement si $[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_i} = 1$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, car C_i est une clause conjonctive. Or, c'est vrai d'après la question précédente.

Question 5. Soient $i, i' \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ tels que $i \neq i'$. Alors, il existe une position $j \in [\![0, n-1]\!]$ telle que i et i' n'ont pas le même chiffre à la j-ème position en binaire. Sans perte de généralité, supposons que i admet un 1 et i' un 0. Alors, $l_{i,j} = X_j$ mais $\sigma_{i'}(X_j) = 0$, donc $[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_{i'}} = 0$, donc $[\![C_i]\!]^{\sigma_{i'}} = 0$

Question 6. Soit σ une valuation, et soit $i \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ tel que $\sigma = \sigma_i$.
Si σ satisfait φ, alors σ_i satisfait φ donc $i \in I$. Alors, C_i est une des clauses apparaissant dans ψ, mais on sait que σ_i satisfait C_i, d'où σ_i satisfait ψ.
Inversement, si σ ne satisfait pas φ, alors $i \notin I$. D'après la Q5, cela signifie que pour tout $i' \in I$, $[\![C_{i'}]\!]^{\sigma_i} = 0$, donc $[\![\psi]\!]^{\sigma_i} = 0$.
Finalement, $\varphi \equiv \psi$.

Exercice 10.

Complétude fonctionnelle

Question 1. Pour C_1 : On sait, d'après les lois de De Morgan, que pour φ, ψ deux formules, $\varphi \vee \psi$ est équivalente à $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Cette équivalence permet de retirer les $\vee$ d'une formule. On peut donc définir T_1 inductivement comme suit :

- $T_1(X) = X$ pour X une variable
- $T_1(\bot) = \bot$ et $T_1(\top) = \top$ [1]
- $T_1(\varphi \wedge \psi) = T_1(\varphi) \wedge T_1(\psi)$ pour $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$
- $T_1(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg T_1(\varphi) \wedge \neg T_1(\psi))$ pour $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$
- $T_1(\neg\varphi) = \neg T_1(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{F}$

On peut montrer par induction structurelle sur les formules que $T_1(\varphi) \equiv \varphi$ pour toute formule φ :

- Pour $\varphi = X, \bot, \top$: $T_1(\varphi) = \varphi$.
- Pour $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$: $T_1(\varphi) = T_1(\varphi_1) \wedge T_1(\varphi_2)$, or $T_1(\varphi_1) \equiv \varphi_1$ et $T_1(\varphi_2) \equiv \varphi_2$ par HI, donc $T_1(\varphi_1) \wedge T_1(\varphi_2) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
- Pour $\varphi = \neg\psi$: analogue
- Pour $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$:

$$\begin{array}{rcll} T_1(\varphi) & = & \neg(\neg T_1(\varphi_1) \wedge \neg T_1(\varphi_2)) & \\ & \equiv & \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) & \text{par HI} \\ & \equiv & \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)\text{par De Morgan} & \\ & \equiv & (\varphi_1 \vee \varphi_2) & = \varphi \end{array}$$

D'où $\forall \varphi \in \mathcal{F}, T_1(\varphi) \equiv \varphi$ par principe d'induction structurelle.
Pour C_2 : même principe avec l'autre loi de De Morgan.

Question 2. Pour C_3 : l'idée est de se ramener à C_2. Table de vérité de $\to$:

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1. Si l'on veut vraiment utiliser seulement les deux connecteurs et rien d'autre, on peut aussi prendre $T_1(\bot) = X \wedge \neg X$ avec X une variable arbitraire, et $T_1(\top) = \neg T_1(\bot)$. .

On sait aussi que pour φ, ψ deux formules, $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$. On peut donc reconstruire l'opérateur $\vee$, en remarquant qu'à l'inverse, on a $\varphi \vee \psi \equiv (\neg\varphi) \to \psi$. D'après la question 1, C_2 étant complet, toute formule φ est équivalente à une formule ψ n'utilisant que $\vee et \neg$, et d'après la remarque précédente, cette formule ψ est équivalente à une formule θ n'utilisant que $\to$ et ./

Pour C_4 : On remarque que $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$. Donc, toute formule φ est équivalente à une formule ψ n'utilisant que $\to$ et $\neg$ d'après la question précédente, et l'on peut transformer ψ en une formule équivalente n'utilisant que $\to$ et $\neg$ avec la remarque ci-dessus.

Question 3. Il suffit de voir que l'on peut recréer les deux opérateurs $\neg$ et $\wedge$ avec $|$ (et on conclut en disant que C_1 est complet :

— $\neg\varphi \equiv \varphi \mid \varphi$
— $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \mid \psi)$