TD13: Graphes

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Exercice 6.

Démo du cours : parcours en largeur

Q1. ...

Q2. ...

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons F_k, P_k, d_k les valeurs de F, P, d après k tours de boucle.
Montrons l'invariant demandé. On note $P(k)$ la propriété à montrer sur F_k, P_k, d_k.

- Initialisation $k = 0$: d vaut $+\infty$ pour tout sommet sauf s, le résultat est trivialement vrai.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Soit u le sommet défilé au début du $k+1$-ème tour, et $v_1, \dots, v_p$ ses voisins n'ayant pas encore été traités (i.e. tels que $d[v_i] = +\infty$). Alors, P_{k+1} est identique à P_k, à l'exception de :
  - $d_{k+1}[v_i] = d_k[u] + 1$ pour $i = 1, \dots, p$, et
  - $P_{k+1}[v_i] = u$ pour $i = 1, \dots, p$, et

  Il suffit de vérifier que pour $i \in [\![1, p]\!]$, il existe un chemin de s à v_i de longueur $d_k[u] + 1$ dont le dernier arc est (u, v_i).
  Par HR, il existe un chemin C de s à u de longueur $d_k[u]$. Donc, le chemin Cv_i, obtenu en ajoutant l'arc (u, v_i) est un chemin valide de s à v_i, de longueur $d_k[u] + 1 = d_{k+1}[v_i]$.

Q4. Puisque $d[u]$ est la longueur d'**un** chemin, et que $\delta(u)$ est la longueur du plus court chemin, on a $\delta(u) \leq d[u]$.

Q5. Notons $P(k)$ la propriété à montrer sur F_k, d_k.

- Initialisation ($k = 0$) : F_k ne contient qu'un élément, $P(0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie.
  Notons $F_k = [u_1, \dots, u_p]$, et $v_1, \dots v_q$ les voisins de u_1 pas encore visités. Alors, $F_{k+1} = [u_2, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q]$.
  On a $d_{k+1}[v_i] = d_k[u_1] + 1$ pour $i = 1, \dots, q$.

  Si $p = 1$, i.e. si u_1 est le seul sommet de la file au début du $k+1$-ème passage, alors F_{k+1} ne contient que les v_i, et comme $d_{k+1}[v_1] = \dots = d_{k+1}[v_q]$, la propriété reste trivialement vraie.
  Sinon, et si $q = 0$, autrement dit si aucun successeur de u_1 n'est nouveau, alors $F_{k+1} = [u_2, \dots, u_p]$, et par HR on a bien $d_{k+1}[u_2] \leq \dots \leq d_{k+1}[u_p]$, et $d_{k+1}[u_p] \leq d_{k+1}[u_1] + 1 \leq d_{k+1}[u_2] + 1$.
  Sinon, on a $d_{k+1}[u_q] \leq d_{k+1}[u_1] + 1 \leq d_{k+1}[v_1] = \dots = d_{k+1}[v_q]$, donc la file est bien triée, et $d_{k+1}[v_q] = d_{k+1}[u_1] + 1 \leq d_{k+1}[u_2] + 1$ donc les distances diffèrent bien d'au plus 1.

Q6. E est non vide, car $p \in E$, et $0 \notin E$ car $x_0 = s$ et $\delta(s) = d[s] = 0$. Donc $\min(E)$ existe et ne vaut pas 0.

Q7. Oubli dans l'énoncé : on pose $i = \min(E)$.

On a $d[v] + 1 = d[x_i]$ car $v = P[u]$, et $\delta(x_{i-1}) = \delta(x_i)$ d'après le lemme suivant :

Lemme 1. Soit $C = x_0, \ldots, x_p$ un plus court chemin de x_0 à x_p. Alors pour $k = 0, \ldots, p$, le sous-chemin $x_0, \ldots, x_k$ est un plus court chemin.

Preuve de ce lemme : s'il existait k pour lequel le chemin $x_0, \ldots, x_k$ n'est pas minimal, alors il existe un chemin C' strictement plus court allant de x_0 à x_k, mais alors le chemin $C', x_{k+1}, \ldots x_p$ est un chemin de x_0 à x_p strictement plus court que C, ce qui est absurde.

En particulier, $x_0, \ldots, x_i$ et $x_0, \ldots, x_{i-1}$ sont des plus courts chemins, ce qui signifie que $\delta(x_i) = \delta(x_{i-1}) + 1$.

Q8. Erreur d'énoncé : il fallait montrer l'inégalité contraire...

On a $\delta(x_i) < d[x_i]$, et par minimalité de i, on a aussi $\delta(x_{i-1}) = d[x_{i-1}]$. Donc :

$$d[x_{i-1}] = \delta(x_{i-1}) = \delta(x_i) - 1 < d[x_i] - 1 = d[v]$$

C'est absurde, car l'algorithme défile les sommets par ordre de d croissant. Donc x_{i-1} a été défilé avant v, mais puisque $P[x_i] = v$, c'est que parmi les prédécesseurs de x_i, c'est v qui a été défilé en premier et pas x_{i-1} : c'est absurde.

Donc $\delta(u) = d[u]$ pour tout sommet u en sortie de l'algorithme.