Devoir d'Informatique n°5

3 mai 2024

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de tout dispositif électronique est interdit.

Consignes

Pour répondre à une question, il vous est permis de réutiliser le résultat d'une question antérieure même si vous n'avez pas réussi à établir ce résultat.

Quand l'énoncé demande de coder une fonction, sauf demande explicite, il n'est pas nécessaire de justifier la correction ou la terminaison de cette fonction, ou de la commenter. Cependant, il est conseillé d'expliquer l'intention de votre code, surtout si celui-ci est long.

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si vous repérez ce qu'il vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les éventuelles initiatives que vous aurez pris.

Vous devrez traiter les questions de programmation dans le langage OCaml.

Exercice de logique

Il est 16h, et votre petit frère qui vient de rentrer de l'école veut que vous lui prépariez son goûter. Vous avez à disposition des fraises, des kiwis, et du chocolat. Voici la liste de ses exigences :

1. Il veut manger un type de fruit (et un seul).
2. S'il ne mange pas de chocolat alors il doit manger un kiwi.
3. S'il ne mange pas de fraise alors il doit manger du chocolat.
4. s'il mange un kiwi, alors il ne mange ni chocolat ni fraise.

On note C, K, F les variables propositionnelles indiquant si le goûter contient du chocolat, du kiwi et de la fraise.

Q1. Représenter la liste des exigences par des formules propositionnelles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. A quelle condition pourrez vous servir à votre petit frère un goûter qui lui plaira ?

Q2. En appliquant l'algorithme de Quine, déterminer s'il existe un goûter convenable. On choisira les variables dans l'ordre alphabétique C, F, K, et on testera systématiquement $\perp$ avant $\top$.

Vous êtes sur le point d'apporter le plateau que vous avez préparé, quand vous vous souvenez qu'à cause de la dernière tendance sur TikTok, votre frère ment une phrase sur deux !

Q3. Exprimer la nouvelle condition à respecter pour pouvoir satisfaire ses demandes.

Q4. A l'aide d'une table de vérité, déterminer s'il existe un goûter convenable.

Logique intuitionniste

Algèbre de Heyting

Définition 1. Un **treillis** est un ensemble ordonné $(L, \leq)$ tel que :

— Pour tout $x, y \in L$, l'ensemble $\{x, y\}$ admet une borne inférieure, notée $x \wedge y$;

— Pour tout $x, y \in L$, l'ensemble $\{x, y\}$ admet une borne supérieure, notée $x \vee y$;

Par exemple, pour E un ensemble quelconque, en notant $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis, où $\vee$ est l'union et $\wedge$ l'intersection. De même, $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité est un treillis, où les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont respectivement le PGCD et le PPCM.

On pose L un treillis quelconque.

Q1. Montrer que pour tout $x \in L$, $x \vee x = x \wedge x = x$.

Q2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute partie de L finie de taille n admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Définition 2. Une **algèbre de Heyting** est un treillis $(H, \leq)$ tel que :

— H admet un plus petit élément noté 0 et un plus grand élément noté 1 ;

— Pour tout $x, y \in H$, l'ensemble $\{z \in X \mid x \wedge z \leq y\}$ admet un plus grand élément, noté $x \to y$.

Si H est une algèbre de Heyting, pour $x \in H$, on note $\neg x = x \to 0$, appelé le **pseudo-complément** de x.

Par exemple, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est une algèbre de Heyting, où pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \to B$ est le plus grand ensemble $C \subseteq E$ tel que $A \cap C \subseteq B$.

Q3. Quel est le plus petit élément de $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$? Et le plus grand ?

Q4. Pour $A, B \subseteq E$, exprimer $A \to B$ en fonction d'opérations ensemblistes plus classiques. Que vaut $\neg A$?

On pose $(H, \vee, \wedge)$ une algèbre de Heyting quelconque. On admet que $\wedge$ est distributive sur $\vee$ et que $\vee$ est distributive sur $\wedge$. Attention, aucune autre formule valable sur les booléens (tiers-exclus, lois de De Morgan, etc...) n'est utilisable a priori dans les algèbres de Heyting. Si vous avez besoin d'utiliser une propriété qui n'a pas été démontrée au préalable, il faudra la justifier avec soin.

Q5. Montrer que $\neg 0 = 1$ et $\neg 1 = 0$.

Q6. Justifier que pour tout $x, y \in H$, on a :

$$\forall z \in H, z \leq (x \to y) \iff x \wedge z \leq y$$

Q7. Montrer que pour $x \in H$, $x \wedge \neg x = 0$

Q8. Montrer que pour $x, y \in H$, $x \leq y$ si et seulement si $x \to y = 1$.

On considère l'algèbre de Heyting $H_3 = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \leq)$, où $\leq$ est l'ordre naturel des réels.

Q9. Recopier et remplir la table des valeurs de $\vee$:

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0			
$\frac{1}{2}$			
1			

Q10. De même, donner les tables des valeurs de $\wedge$ et $\rightarrow$.

Q11. Montrer que la règle du tiers-exclus n'est pas valide dans H_3, i.e. qu'il existe $x \in H_3$ tel que $x \vee \neg x \neq 1$.

On se replace à nouveau dans une algèbre de Heyting H quelconque.

Q12. On suppose que pour tout $x \in H$, $x \vee \neg x = 1$. Montrer qu'alors pour tout $x \in H$, $\neg\neg x = x$.

Q13. Inversement, on suppose que pour tout $x \in H$, $\neg\neg x = x$. Montrer qu'alors pour tout $x \in H$, $x \vee \neg x = 1$.

Sémantique intuitionniste

La logique **intuitionniste** est un système logique qui ne permet pas d'utiliser le tiers-exclu, le raisonnement par l'absurde, et de manière générale tous les raisonnements qui mènent à des preuves non constructives. Elle s'oppose à la logique **classique**, que l'on a étudié en cours.

Les algèbres de Heyting servent de modèle à la logique intuitionniste, de la même manière que l'ensemble des booléens $\{0, 1\}$ sert de modèle à la logique classique.

On considère $\mathcal{Q}$ un ensemble infini de variables propositionnelles. On définit inductivement l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles comme suit :

$$\varphi ::= Q \mid \top \mid \bot \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$$

où $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ représentent des éléments de $\mathcal{F}$, et Q un élément de $\mathcal{Q}$.

Dans la suite, on fixe $(H, \leq)$ une algèbre de Heyting, et on note 0 et 1 son plus petit et son plus grand élément. Pour $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow H$ une fonction quelconque (appelée **environnement**), on définit inductivement l'interprétation d'une formule $\varphi \in \mathcal{F}$ dans σ, notée $[\![\varphi]\!]^\sigma$:

- $[\![\top]\!]^\sigma = 1$
- $[\![\bot]\!]^\sigma = 0$
- Pour $Q \in \mathcal{Q}$, $[\![Q]\!]^\sigma = \sigma(Q)$
- Pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$, $[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]^\sigma = [\![\varphi_1]\!]^\sigma \vee [\![\varphi_2]\!]^\sigma$
- Pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$,$[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^\sigma = [\![\varphi_1]\!]^\sigma \wedge [\![\varphi_2]\!]^\sigma$
- Pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$,$[\![\varphi_1 \rightarrow \varphi_2]\!]^\sigma = [\![\varphi_1]\!]^\sigma \rightarrow [\![\varphi_2]\!]^\sigma$

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{F}$, on note $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \bot$, de telle sorte que $[\![\neg\varphi]\!]^\sigma = \neg[\![\varphi]\!]^\sigma = [\![\varphi]\!]^\sigma \rightarrow 0$. On dit qu'un environnement σ **satisfait** une formule φ si $[\![\varphi]\!]^\sigma = 1$. Pour $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ un ensemble fini de formules et $\varphi \in \mathcal{F}$, On dit que φ est **conséquence logique de** Γ si pour tout environnement σ, on a :

$$[\![\bigwedge_{\psi \in \Gamma} \psi]\!]^\sigma \leq [\![\varphi]\!]^\sigma$$

On note alors $\Gamma \vDash \varphi$.

Notons qu'en prenant $H = \{0, 1\}$ l'algèbre de Heyting à deux éléments (i.e. l'algèbre des booléens), on retrouve la sémantique classique de la logique propositionnelle.

Règles de déduction

On étudie quelques propriétés de la logique intuitionniste. Tout d'abord, le fait que la formule $\top$ est bien une conséquence logique de tout ensemble d'hypothèse :

Q14. Montrer que pour toute partie finie $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\Gamma \vDash \top$.

La règle suivante exprime que l'on peut déduire n'importe quelle propriété d'un ensemble d'hypothèses contenant cette propriété :

Q15. Montrer que pour toute partie finie $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$, si $\varphi \in \Gamma$ alors $\Gamma \vDash \varphi$.

Vérifions également le principe d'explosion, qui dit que si l'on peut prouver une propriété fausse, alors on peut prouver n'importe quelle propriété :

Q16. Montrer que pour toute partie finie $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$, si $\Gamma \vDash \bot$, alors $\Gamma \vDash \varphi$.

La règle suivante montre que si l'on peut déduire deux propriétés, alors on peut déduire leur conjonction :

Q17. Montrer que pour toute partie finie $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, pour toutes formules $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, si $\Gamma \vDash \varphi$ et $\Gamma \vDash \psi$, alors $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$.

La règle suivante, parfois appelée **modus ponens**, correspond à l'utilisation d'une implication dans une preuve :

Q18. Montrer que pour toute partie finie $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, pour toutes formules $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, si $\Gamma \vDash \varphi$ et $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, alors $\Gamma \vDash \psi$.

Enfin, regardons la règle suivante, qui sert à utiliser une disjonction dans une preuve :

Q19. Montrer que pour toute partie finie $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, pour toutes formules $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{F}$, si les trois conditions suivantes sont réalisées :

— $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$
— $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \theta$
— $\Gamma \cup \{\psi\} \vDash \theta$

alors $\Gamma \vDash \theta$.

Plongement de la logique classique

Pour φ une formule et $\sigma : \mathcal{Q} \to H$ un environnement, on dit que σ est un **environnement classique** si pour toute variable $Q \in \mathcal{Q}$, $\sigma(Q) \in \{0, 1\}$, i.e. si les variables sont envoyées sur l'un des deux éléments extrêmes de l'algèbre H.

Q20. Montrer que pour toute formule φ et pour tout environnement classique σ, $[\![\varphi]\!]^\sigma \in \{0, 1\}$.

Pour $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ finie et $\varphi \in \mathcal{F}$, on note $\Gamma \vDash_C \varphi$ si pour tout environnement classique σ, $\sigma(\bigwedge \Gamma) \leq \sigma(\varphi)$. D'après la question précédente, cela revient à dire que pour tout environnement classique σ, si $\sigma(\bigwedge \Gamma) = 1$, alors $\sigma(\varphi) = 1$.

Les environnements classiques permettent donc de modéliser la logique dite classique, qui est celle que nous avons vue en cours. On dit qu'une formule φ est un **théorème classique** si $\vDash_C \varphi$, et que c'est un **théorème intuitionniste** si $\vDash \varphi$.

Q21. Déterminer si chacune des deux affirmations suivantes est vraie ou fausse, avec une preuve ou un contre-exemple à l'appui.

1. Tout théorème classique est un théorème intuitionniste.
2. Tout théorème intuitionniste est un théorème classique.

On définit par induction sur les formules la fonction $p : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ suivante.

— $p(Q) = \neg\neg Q$

— $p(\bot) = \bot$

— $p(\top) = \top$

— $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$

— $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$

— $p(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg p(\varphi) \wedge \neg p(\psi))$

Cette fonction est un **plongement** de la logique classique dans la logique intuitionniste, au sens suivant :

Théorème 1. Une formule φ est un théorème classique si et seulement si $p(\varphi)$ est un théorème intuitionniste.

Ce théorème affirme donc que la logique intuitionniste est plus puissante que la logique classique, puisque l'on peut l'utiliser pour encoder la logique classique par le biais de la fonction p.

L'objectif de cette section est de démontrer ce théorème.

Q22. Montrer que pour $\varphi \in \mathcal{F}$ et pour σ un environnement classique, $[\![\varphi]\!]^\sigma = [\![p(\varphi)]\!]^\sigma$.

Q23. Montrer le sens indirect du théorème par induction sur l'ensemble des formules. du théorème.

Afin de montrer le sens direct du théorème, nous allons introduire quelques lemmes intermédiaires.

Q24. Soient $x, x', y \in H$, avec $x \leq x'$. Montrer les deux résultats suivants :

1. $x \wedge y \leq x' \wedge y$
2. $x \vee y \leq x' \vee y$.

Q25. Soient $x, y, z \in H$. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $x \leq y$
2. $x \leq z$

Montrer qu'alors, $x \leq \neg(\neg y \wedge \neg z)$.

Q26. Montrer le sens direct du théorème.