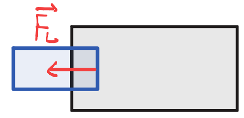
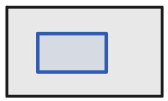
Correction TD24

Exercice 1

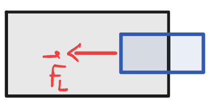
1)



phase d'entrée
Φ varie $\Rightarrow e \Rightarrow i$
i et $\vec{B} \Rightarrow \vec{F_L}$
loi de Lenz : $\vec{F_L}$ s'oppose au mouvement
freinage

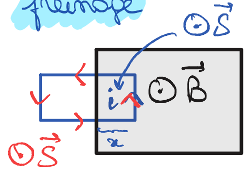


dans la zone de champ $\vec{B}$
$\Phi = Cte \to$ pas d'induction
MRU



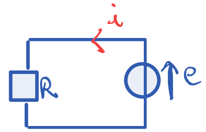
phase de sortie
Φ varie $\Rightarrow e \Rightarrow i$
i et $\vec{B} \Rightarrow \vec{F_L}$ qui s'oppose au mouvement selon la loi de Lenz
freinage

2)



$\Phi = BS = Bxl \qquad e = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow e = -Blv$

3) Schéma électrique équivalent :

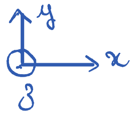


e (orientée à le contour !)

$e = Ri \qquad i = \frac{e}{R} = -\frac{Blv}{R}$

4) $\vec{F_L} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ ← composante s'exerçant sur la partie ⊥ à L (les autres se compensent)

$\vec{F_L} = il\vec{u_y} \wedge B\vec{u_z}$
sens de $\vec{l}$ = sens de i



$\vec{F_L} = -\frac{B^2l^2}{R} v\vec{u_x}$

freinage, conforme à la loi de Lenz

5) Système : {luge} Réf : terrestre sup. galiléen

PFD selon $\vec{u_x}$: $m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}v \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2}{mR}v = 0$

On pose $\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$

6) $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau) \qquad x(t) = \int_0^t v_0 \exp(-t/\tau)\,dt$

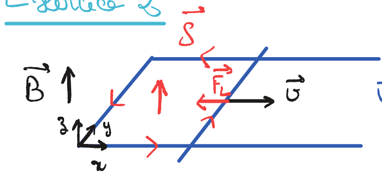
$x(t) = v_0\tau(1-\exp(-t/\tau))$

7) $x(T) = L \qquad 1-\exp(-T/\tau) = \frac{L}{v_0\tau} \qquad T = -\tau\ln\left(1-\frac{L}{v_0\tau}\right) = 35\,ms$

8) Il est inutile que la zone soit plus longue que L puisque lorsque la luge est entièrement dans la zone du champ $\vec{B}$, le freinage cesse.

L est la longueur idéale.

Exercice 2

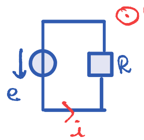


Prévisions

$\vec{v} \Rightarrow S$ varie → Φ varie → induction e → i → $\vec{F_L}$

$\vec{F_L}$ s'oppose à $\vec{v}$

1) $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS \qquad S = ax \qquad e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{x} \qquad e = -Bav$



$e = Ri \qquad i = -\frac{Bav}{R}$

2) $\vec{F_L} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = -\frac{Bav}{R} a\vec{u_y} \wedge B\vec{u_z} \qquad \vec{F_L} = -\frac{B^2a^2}{R}v\vec{u_x}$

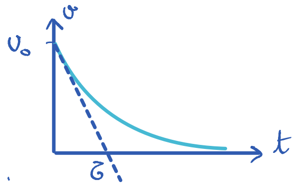
$a\vec{u_y}$ car i calculé dans le sens de $+\vec{u_y}$ — conforme aux prévisions

Système : { tige }   Réf : terrestre supposé galiléen

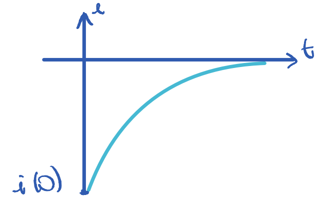
Etude du mouvement horizontal : seule la force de Laplace s'applique selon $\vec{u}_x$

PFD : $m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2a^2}{R}v$ $\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0$ $\tau = \frac{mR}{B^2a^2}$

3) $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$



4) $i(t) = -Ba\frac{v}{R}$ $i(0) = -\frac{Bav_0}{R}$



5) Loi de Lenz : le phénomène d'induction s'oppose par ses effets à la cause qui lui a donné naissance. Ici $\vec{F}_L$ freine le mouvement.

Exercice 3

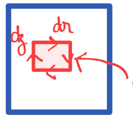
1) $\vec{B}(M) = \vec{B}_{fil}(M) + \vec{B}_{tore}(M)$

↳ dépend du temps : auto-induction

↳ dépend du temps : induction mutuelle

$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{Ni + I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ dépend de r donc non uniforme.

2) $\Phi_1 = \iint_{1\ spire} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \frac{Ni+I}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{r_0-a}^{r_0+a} \frac{1}{r}dr$ $\Phi_1 = \mu_0 \frac{Ni+I}{2\pi} a \ln\frac{r_0+a}{r_0-a}$



$\vec{dS} = dz\,dr\,\vec{e}_\theta$

flux total : $\Phi = N\Phi_1$ $\Phi = \mu_0 \frac{N^2 i + NI}{2\pi} a \ln\frac{r_0+a}{r_0-a}$

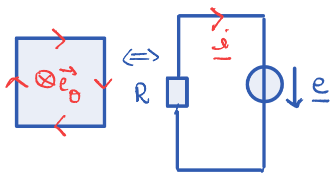
$\Phi = \Phi_p + \Phi_m = Li + MI$ On peut identifier L et M :

$L = \mu_0 \frac{N^2}{2\pi} a \ln\frac{r_0+a}{r_0-a}$ $M = \mu_0 \frac{N}{2\pi} a \ln\frac{r_0+a}{r_0-a}$

3) $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ $e = -\mu_0 \frac{a}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0-a} N\left(N\frac{di}{dt} + \frac{dI}{dt}\right)$

4) On pose en complexe : $\underline{e} = -\mu_0 \frac{a}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0-a} N j\omega(N\underline{i} + \underline{I})$

Circuit électrique équivalent :



$\underline{e} = R\underline{i}$

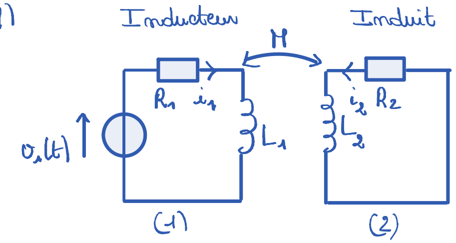
$\left(\mu_0 \frac{a}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0-a}N^2 j\omega + R\right)\underline{i} = -\mu_0\frac{a}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0-a}N\underline{I}$

$\frac{i_m}{I_m} = \left|\frac{\underline{i}}{\underline{I}}\right| = \frac{\mu_0 \frac{a}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0-a}N}{\left|\mu_0\frac{a}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0-a}N^2 j\omega + R\right|}$ $\frac{i_m}{I_m} = \frac{1}{N}$ si R est négligeable

5) Ce dispositif étant basé sur 1 phénomène d'induction, il n'est pas utilisable en continu.

Exercice 4

1)



2) (1) $v_1 = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ (2) $R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$

3) On pose (2) en complexe : $R_2\underline{i}_2 + jL_2\omega\underline{i}_2 + jM\omega\underline{i}_1 = 0$ $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$

4) On passe (1) en complexe : $\underline{v}_1 = R_1 \underline{i}_1 + jL_1\omega \underline{i}_1 + jM\omega \times \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}\underline{i}_1$

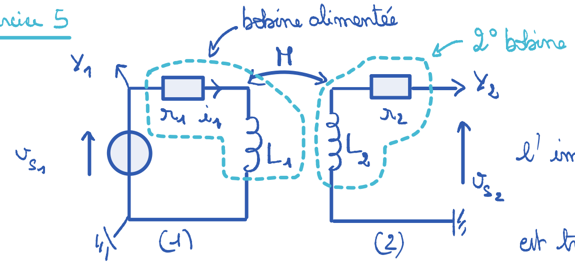
$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_1}{\underline{i}_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

5) $\underline{Z}_e = jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{jL_2\omega}$ $\quad \underline{Z}_e = j\left(L_1\omega - \frac{M^2\omega}{L_2}\right)$

6) $\langle P_J \rangle = R_1 i_{1eff}^2 + R_2 i_{2eff}^2$ $\quad i_{eff} = \frac{v_{1eff}}{L_1\omega - \frac{M^2\omega}{L_2}}$ $\quad i_{2eff} = i_{1eff}\frac{M}{L_2}$

$\langle P_J \rangle = 69{,}4 + 2{,}22 \times 10^3 = 2{,}27\ \text{kW}$

Exercice 5



l'impédance d'entrée d'un oscilloscope est très grande : $i_2 = 0$

(1) $v_{s_1}(t) = r_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + \cancel{M\frac{di_2}{dt}}$ $\qquad$ (2) $v_{s_2}(t) = \cancel{r_2 i_2} + \cancel{L_2\frac{di_2}{dt}} + M\frac{di_1}{dt}$

$\underline{v}_{s_1} = (r_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1$ $\qquad$ $\underline{v}_{s_2} = jM\omega\,\underline{i}_1$

$\hookrightarrow \begin{cases} V_{1m} = (r_1^2 + L_1^2\omega^2)^{1/2} I_{1m} \\ \varphi_{v_{s_1}/i_1} = \arctan\frac{L_1\omega}{r_1} \Rightarrow L_1 = \frac{r_1\tan\varphi_{v_{s_1}/i_1}}{\omega} \end{cases}$ $\qquad$ $\hookrightarrow \begin{cases} |M| = \frac{V_{s_2m}}{\omega I_{1m}} \\ \varphi_{v_{s_2}/i_1} = +\frac{\pi}{2} \text{ si } M>0,\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } M<0 \end{cases}$

$V_{1m}^2 = \left(r_1^2 + \frac{r_1^2\tan^2\varphi_{v_{s_1}/i_1}}{\omega}\right) I_{1m}^2$ $\qquad$ on mesure $-\frac{\pi}{2}$ donc $M<0$

$\rightarrow r_1 = 9{,}7\ \Omega$ $\qquad$ $M = 80\ \text{mH}$

$\rightarrow L_1 = 0{,}18\ \text{H}$

Exercice 6

1) $L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + u_{c_1} = 0$ $\qquad$ $L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + u_{c_2} = 0$

or $i_1 = C\frac{du_{c_1}}{dt}$ $\quad i_2 = C\frac{du_{c_2}}{dt}$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\qquad$ $\ddot{u}_{c_1} + \frac{M}{L}\ddot{u}_{c_2} + \omega_0^2 u_{c_1} = 0$

$\ddot{u}_{c_2} + \frac{M}{L}\ddot{u}_{c_1} + \omega_0^2 u_{c_2} = 0$

2) $\ddot{u}_{c+}\left(1 + \frac{M}{L}\right) + \omega_0^2 u_{c+} = 0$ $\qquad$ $\ddot{u}_{c-}\left(1 - \frac{M}{L}\right) + \omega_0^2 u_{c-} = 0$

$u_{c+}(t) = A_+\cos(\omega_+ t + \varphi_+)$ $\qquad$ $u_{c-}(t) = A_-\cos(\omega_- t + \varphi_-)$

continuité de u_{c_1} et u_{c_2} $\qquad$ continuités de i_1 et i_2

$\left.\begin{array}{l} u_{c+}(0) = E \\ u_{c-}(0) = E \end{array}\right\} \rightarrow A_+\cos\varphi_+ = A_-\cos\varphi_-$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} i_1(0) = 0 \rightarrow \frac{du_{c_1}}{dt} = 0 \\ i_2(0) = 0 \rightarrow \frac{du_{c_2}}{dt} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{du_{c+}}{dt}(0) = \frac{du_{c-}}{dt}(0) = 0$

$\varphi_+ = \varphi_- = 0$

$u_{c+}(t) = E\cos(\omega_+ t)$ $\qquad$ $u_{c-}(t) = E\cos(\omega_- t)$

$u_{c_1}(t) = \frac{u_{c+} + u_{c-}}{2}$ $\rightarrow$ $u_{c_1}(t) = \frac{E}{2}\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)$

$u_{c_2}(t) = \frac{u_{c+} - u_{c-}}{2}$ $\rightarrow$ $u_{c_2}(t) = \frac{E}{2}\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)$

3) $\omega_+ = \omega_0 \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{L}}} \simeq \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{M}{L}\right)$ $\qquad$ $n = 2$

$\omega_- = \omega_0\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{L}}} \simeq \omega_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{M}{L}\right)$

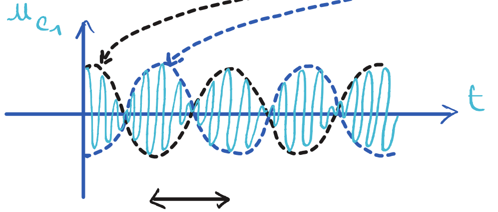
4) $u_{c_1}(t) = \frac{E}{2}\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right) = E\cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right)$

$u_{c_1}(t) = E\cos(\omega_0 t)\cos\left(\omega_0 \frac{M}{2L} t\right)$

Si $M \ll 2L$: oscillations "rapides" dans 1 enveloppe de fréquence bien plus petite

$2\pi f = \omega_0 \frac{M}{2L}$

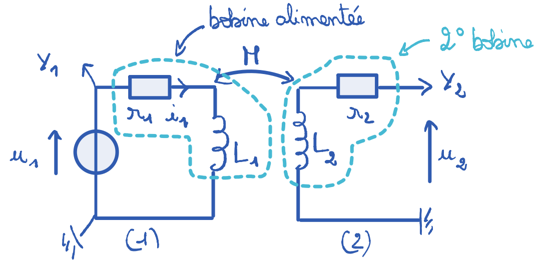
$\Rightarrow$ Battements



$T/2$ avec $T = \frac{1}{f} = \frac{4\pi L}{M\omega_0}$

En mesurant la période des battements $T_{bat.} = \frac{T}{2} = \frac{2\pi L}{M\omega_0} = \frac{T_0 L}{M}$ on peut en déduire M.

Exercice 7



$i_2 = 0$ (cf. ex. 5)

u_1 → u_2 caractère dérivateur

$\underline{u}_2 \simeq k j\omega \underline{u}_1$ à déterminer

$\underline{u}_1 = r_1 \underline{i}_1 + L_1 j\omega \underline{i}_1$

$\underline{u}_2 = j\omega M \underline{i}_1 = j\omega M \frac{\underline{u}_1}{r_1 + jL_1\omega}$

On retrouve le caractère dérivateur si $r_1 \gg L_1\omega$ $\rightarrow$ $\underline{u}_2 \simeq j\omega \frac{M}{r_1} \underline{u}_1$

$u_2(t) = \frac{M}{r_1}\frac{du_1}{dt}$ $\qquad M = \frac{r_1}{du_1/dt} u_2$

Etude sur une demi-période : u_1 droite ↗ : $\frac{du_1}{dt} = \text{pente} = \frac{1{,}4 \times 1}{2{,}5 \times 2 \times 10^{-4}}$

$u_2 = 1{,}5\,V$ $\Rightarrow$ $M = 53{,}4\ mH$