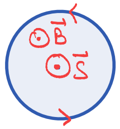
Correction TD 25

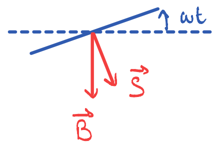
Exercice 1

1) La rotation de la spire fait varier le flux au travers sa surface : il y a 1 phénomène d'induction $\rightarrow e(t) \rightarrow i$ (courant induit dans la spire) $\rightarrow \vec{m} = i\vec{S} \Rightarrow$ couple de Laplace qui s'oppose à la rotation de la spire (loi de Lenz)

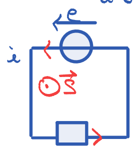
2)



à t=0



à t



$\Phi = BS\cos(\omega t)$

$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow e = \omega BS\sin(\omega t)$

$i = \frac{e}{R}$ $\quad i = \frac{\omega BS\sin(\omega t)}{R}$

3) $C_L = \vec{m} \wedge \vec{B} = i\,\vec{S} \wedge \vec{B} = \frac{\omega BS}{R}\sin(\omega t)\, S \begin{vmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{C_L} = -\frac{\omega B^2 S^2}{R}\sin^2(\omega t)\,\vec{u_z}$

s'oppose au mouvement de rotation (conforme à la loi de Lenz)

4) En régime stationnaire $C_L = -C_m$ $\quad (J\frac{d\omega}{dt} = C_m - C_L = 0)$

$\times\omega$

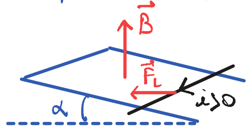
5) $P_J = Ri^2 = R\frac{\omega^2 S^2}{R^2}B^2\sin^2(\omega t)$ $\quad P_m = -P_L = \frac{\omega^2 B^2 S^2}{R}\sin^2(\omega t)$

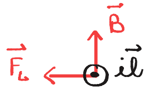
ei

$P_J = P_m$ $\quad$ (On retrouve $ei + P_L = 0$) $\quad \eta = 100\%$

Exercice 2

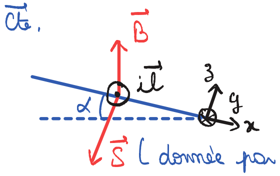
1) La force de Laplace doit s'opposer au mouvement (loi de Lenz)





2) Si le barreau s'immobilise alors le phénomène d'induction cesse, la tige repartirait sous l'effet du poids. Il ne s'immobilise pas. On va par contre atteindre un régime permanent où $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{Cte}$.

3) $\Phi = -BS\cos\alpha$



$\vec{S}$ (donné par le sens de $i>0$, pour changer...)

$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Bl\cos\alpha\, v$

$\rightarrow i = \frac{Blv\cos\alpha}{R}$

PFD appliqué à la tige dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{F_L}$ $\quad \vec{F_L} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = \frac{Blv\cos\alpha}{R}\begin{vmatrix} 0 \\ -l \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -B\sin\alpha \\ 0 \\ B\cos\alpha \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} mg\sin\alpha \\ 0 \\ -mg\cos\alpha \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{R_N}\| \end{vmatrix}$ $\quad \vec{F_L} = Bl\frac{v\cos\alpha}{R}\begin{vmatrix} -lB\cos\alpha \\ 0 \\ -Bl\sin\alpha \end{vmatrix}$

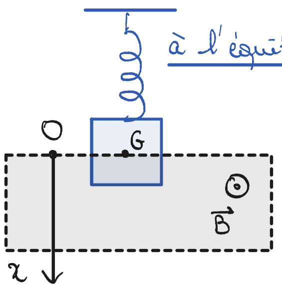
Selon $\vec{u_x}$: $\quad m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2\cos^2\alpha}{R}v + mg\sin\alpha$

$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g\sin\alpha$ $\quad$ avec $\quad \tau = \frac{mR}{B^2l^2\cos^2\alpha}$

4) $v(t) = g\sin\alpha\,\tau\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right) \rightarrow x(t) = g\sin\alpha\,\tau t + g\sin\alpha\,\tau^2 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + Cte$

$x(0) = 0$ $\quad \boxed{x(t) = g\sin\alpha\,\tau t + g\sin\alpha\,\tau^2\left(\exp(-t/\tau) - 1\right)}$

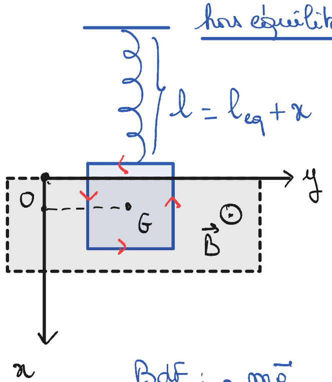
Exercice 3



à l'équilibre $\quad l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$

1) hors équilibre : Φ varie $\rightarrow e(t) \rightarrow i(t) \rightarrow \vec{F_L}$

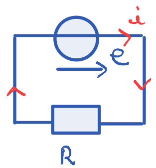
Surface plongée dans $\vec{B}$: $S = a\left(\frac{a}{2} + x\right)$



hors équilibre

$l = l_{eq} + x$

$\Phi = B\,a\left(a/2 + x\right) \quad \rightarrow e(t) = -Ba\dot{x}$



$e = Ri \quad i = -\frac{Ba\dot{x}}{R}$

Système : {cadre} $\quad$ Réf : terrestre sup. galiléen

BdF : $\cdot\ m\vec{g}$

$\cdot\ \vec{F_L} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = i\,a\,\vec{u_y} \wedge B\,\vec{u_z} = i a B\,\vec{u_x} = -\frac{B^2a^2}{R}\dot{x}\,\vec{u_x}$

composante sur la partie inférieure, les forces s'exerçant sur les côtés verticaux se compensent.

$\cdot\ \vec{F_e} = -k(l - l_0)\vec{u_x}$

PFD selon $\vec{u_x}$ $\quad m\ddot{x} = mg - k\left(l_0 + \frac{mg}{k} + x - l_0\right) - \frac{B^2a^2}{R}\dot{x}$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{B^2a^2}{mR}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

On pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{B^2a^2}{mR} = \frac{1}{\tau}$ $\quad \boxed{Q = \sqrt{km}\,\frac{R}{B^2a^2}}$ $\quad \boxed{\tau = \frac{mR}{B^2a^2}}$

pulsation propre $\quad$ facteur de qualité

2) hyp : $\Delta < 0$ régime pseudopériodique

pseudo pulsation : $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}}$

$x(t) = \exp(-t/\tau)\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$

$x(0) = \frac{a}{2} \rightarrow A = \frac{a}{2}$

$\dot{x}(0) = 0 \quad -\frac{1}{\tau}A + B\Omega = 0 \quad B = \frac{a}{2}\,\frac{1}{\Omega\tau}$

$$\boxed{x(t) = \frac{a}{2}\exp(-t/\tau)\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)}$$

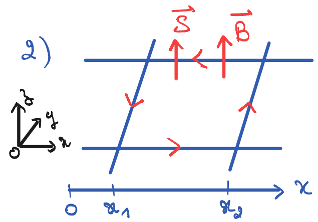
Exercice 4

1) le mouvement de $T_1 \Rightarrow$ variation du flux de $\vec{B} \Rightarrow e(t) \Rightarrow i(t)$ dans le circuit fermé par les

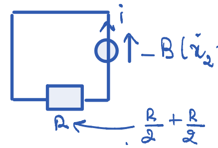
2 tiges $\Rightarrow$ force de Laplace qui s'oppose à ce qui lui a donné naissance, ici le mouvement de T_1

$\rightarrow$ freinage. $\quad i(t)$ dans $T_2 \Rightarrow$ force de Laplace $\Rightarrow$ mise en mouvement.

2)



$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = B(x_2 - x_1)a \quad e = -B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)a$



$e = Ri \quad \boxed{i = -Ba\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{R}}$

Calcul des forces de Laplace :

Sur T_1 : $\vec{F}_{L_1} = -i\,a\,\vec{u_y} \wedge \vec{B} = \underbrace{B^2a^2\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{R}}_{-iaB}\vec{u_x}$ $\quad$ Sur T_2 : $\vec{F}_{L_2} = \underbrace{-B^2a^2\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{R}}_{iaB}\vec{u_x}$

Système : $\{T_1\}$ BdF : $\underbrace{m\vec{g}, \vec{R_N}}_{\Sigma = \vec{0}}$, $\vec{F}_{L_1}$ $m\ddot{x}_1 = B^2a^2 \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{R}$

Système : $\{T_2\}$ BdF : $\underbrace{m\vec{g}, \vec{R_N}}_{\Sigma = \vec{0}}$, $\vec{F}_{L_2}$ $m\ddot{x}_2 = -B^2a^2 \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{R}$

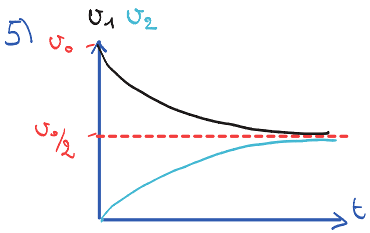
3) (1) $\frac{dv_1}{dt} = \frac{v_2 - v_1}{mR} B^2a^2$ (2) $\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2 - v_1}{mR} B^2a^2$

(1) + (2) $\frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 0$ $v_1 + v_2 = Cte = v_1(0) + v_2(0) = v_0$

$v_2 = v_0 - v_1$ (1) $\rightarrow \frac{dv_1}{dt} = \frac{v_0 - 2v_1}{mR} B^2a^2$ $\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{\tau} v_1 = \frac{v_0}{2\tau}$ où $\tau = \frac{mR}{2B^2a^2}$

$v_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{v_0}{2}$ $v_1(0) = v_0$ $A = \frac{v_0}{2}$

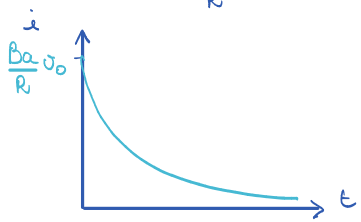
$v_1(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ $v_2 = v_0 - v_1 \Rightarrow$ $v_2(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

5) 

$t \to \infty$ $v_1 \to \frac{v_0}{2}$ $v_2 \to \frac{v_0}{2}$

$v_{1\infty} = v_{2\infty}$ même vitesse donc $\Phi = Cte$ le phénomène d'induction cesse.

6) $i(t) = -\frac{Ba}{R}(v_2 - v_1) = -\frac{Ba}{R} v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$



$i_\infty = 0$ (fin du phénomène d'induction)

7) Bilan énergétique :

① Avec les puissances :

* Mécanique : $\frac{dE_c}{dt} = P_{L_1} + P_{L_2}$

* Electrique : $(e = Ri) \times i \rightarrow ei = Ri^2 = P_J$

Conversion électromécanique : $P_L + ei = 0 \rightarrow ei = -P_L = -\frac{dE_c}{dt}$ $P_J = -\frac{dE_c}{dt}$

$\rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_J$ ← énergie dissipée par effet Joule

L'énergie cinétique perdue est convertie en chaleur par effet Joule.

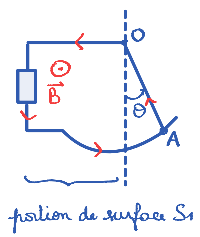
② Calcul direct

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_{1\infty}^2 + v_{2\infty}^2) - \frac{1}{2} m (v_1^2(0) + v_2^2(0)) = m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{4} m v_0^2$

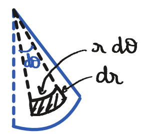
$\Delta E_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = R \int_0^\infty \frac{B^2a^2}{R^2} v_0^2 \exp\left(-\frac{2}{\tau} t\right) dt = \frac{B^2a^2}{R} \times \frac{\tau}{2} v_0^2 = \frac{B^2a^2}{2R} \frac{mR}{2B^2a^2} v_0^2 = \frac{1}{4} m v_0^2$

On retrouve $\Delta E_c = -\Delta E_J$.

Exercice 5

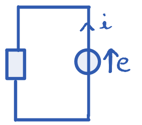
1) 

Surface du circuit : $S = S_1 + \int_0^{\ell}\int_0^{\theta} r\,dr\,d\theta = S_1 + \frac{\ell^2}{2}\theta$



Flux : $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\left(S_1 + \frac{\ell^2}{2}\theta\right)$

fém : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\frac{\ell^2}{2}\dot{\theta}$

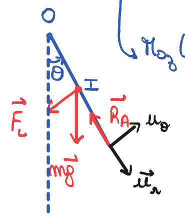
2)  $i = \frac{e}{R}$ $\quad i = -\frac{B\ell^2}{2R}\dot{\theta}$

3) Système : {barre} Réf : terrestre supp. galiléen

BdF : $m\vec{g}$, $\vec{F_L}$, $\vec{R}_{axe}$, $\vec{R}_A$ (réaction du support en A) → dirigée selon la barre donc $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}_A) = 0$

↳ liaison pivot parfaite donc $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}_{axe}) = 0$

$\vec{F_L} = i\,\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -i\frac{\ell}{2}\vec{u}_r \wedge B\vec{u}_z = i\frac{\ell}{2}B\vec{u}_\theta = -\frac{B^2\ell^3}{2R}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$



↳ $\mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$

bras de levier

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_L}) = -\frac{B^2\ell^3}{2R}\dot{\theta} \times \frac{\ell}{2} = -\frac{B^2\ell^4}{4R}\dot{\theta}$

ou

$$\vec{M}_O(\vec{F_L}) = \vec{OG} \wedge \vec{F_L} = \begin{vmatrix} \ell/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -B^2\ell^3/2R\,\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{B^2\ell^4}{4R}\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

TMC scalaire selon Oz : $\underbrace{J}_{\frac{1}{3}m\ell^2}\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta - B^2\frac{\ell^4}{4}\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{3B^2\ell^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0$$

2) $\sin\theta \simeq \theta$ $\quad \ddot{\theta} + \frac{3B^2\ell^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = 0$ $\quad$ OHNA $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3B^2\ell^2}{4mR}$ $\quad Q = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}\, mR \frac{4}{3B^2\ell^2}$ $\Rightarrow Q = \frac{mR}{B^2\ell^2}2\sqrt{\frac{2g}{3\ell}}$

3) Si $R\nearrow$ $i\searrow$ et la force de Laplace $\searrow$: $Q\nearrow$, $Q>\frac{1}{2}$: $R<R_c$: régime pseudo-périodique

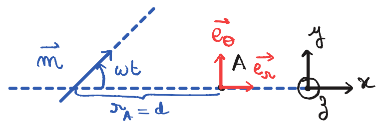
$Q<\frac{1}{2}$: $R>R_c$: régime apériodique

R_c : $\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$

$$R_c = \frac{B^2\ell^2}{4m}\sqrt{\frac{3\ell}{2g}}$$

Rq : avec $P_e + P_L = 0$ $\quad ei + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_L})\cdot\dot{\theta} = 0$ on peut retrouver $e = \frac{-iB\,\ell^2/2\,\dot{\theta}}{i}\dot{\theta} = -\frac{B\ell^2}{2}\dot{\theta}$

Exercice 6



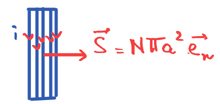
ie)

1) $\vec{B}_{aimant}(A) = \frac{\mu_0 m}{4\pi d^3}(2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta})$ $\quad$ en A : $\theta = -\omega t$

$\vec{e_r} = \vec{e_x}$ $\quad \vec{e_\theta} = \vec{e_y}$

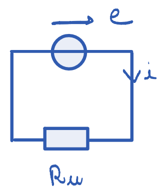
$$\vec{B}_{aimant}(A) = \frac{\mu_0 m}{4\pi d^3}(2\cos(\omega t)\vec{e_x} - \sin(\omega t)\vec{e_y})$$

2) $\Phi = Li + \vec{B}_{aimant}\cdot\vec{S}$



$$\Phi = Li + \frac{\mu_0 m}{2d^3}Na^2\cos(\omega t)$$

3) Schéma électrique équivalent



$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} + \omega\frac{\mu_0 m}{2d^3}Na^2\sin(\omega t)$

$e = R_u i$ $\quad R_u i + L\frac{di}{dt} = \omega\frac{\mu_0 m}{2d^3}Na^2\sin(\omega t)$

4) en $\mathbb{C}$: $j\omega L\underline{i} + R_u\underline{i} = \omega\frac{\mu_0 m}{2d^3}Na^2 e^{j(\omega t - \pi/2)}$

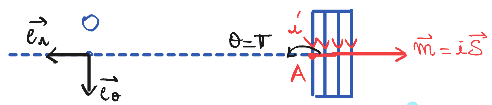
$\underline{i} = \frac{\omega\frac{\mu_0 m}{2d^3}Na^2}{R_u + jL\omega}e^{j(\omega t - \pi/2)}$ $\quad I_m = |\underline{i}|$ $\quad I_m = \frac{\omega\mu_0 m Na^2}{2d^3\sqrt{R_u^2 + L^2\omega^2}}$

$\arg(\underline{i}) = \omega t + \varphi = \omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R_u}\right)$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R_u}\right)$. $\quad$ on pose pour la suite $\Phi = \arctan\frac{L\omega}{R_u}$

5) $\langle P_{Joule}\rangle = R_u I_{eff}^2$ $\quad \langle P_{Joule}\rangle = \frac{1}{2}R_u I_m^2$

6) On peut assimiler la bobine à 1 dipôle magnétique $\vec{m}_{bobine} = Ni\pi a^2\vec{e_x}$



$\vec{B}_{bobine}(O) = \frac{\mu_0 Ni\pi a^2}{4\pi d^3}(2\cos\pi(-\vec{e_x}) + \sin\pi(-\vec{e_y}))$ $\quad \vec{B}_{bobine} = \frac{\mu_0 Ni a^2}{2d^3}\vec{e_x}$

7) $\vec{\Gamma}_{laplace} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{bobine} = \begin{vmatrix} m\cos(\omega t) \\ m\sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{\mu_0 N i a^2}{2d^3} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\frac{\mu_0 N i a^2}{2d^3}\sin(\omega t) \end{vmatrix}$

$$\vec{\Gamma}_{laplace} = -m\mu_0 N \frac{\omega\mu_0 m N a^2}{2d^3\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}\frac{a^2}{2d^3}\cos(\omega t+\varphi)\sin(\omega t)\,\vec{u}_3$$

$$\vec{\Gamma}_{laplace} = -m^2\mu_0^2N^2\frac{a^4}{4d^6}\frac{\omega}{\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}\underbrace{\sin(\omega t-\Phi)\sin(\omega t)}_{1/2\left(\cos\Phi-\cos(2\omega t-\Phi)\right)}\vec{u}_3$$

$$\vec{\Gamma}_{laplace} = -m^2\mu_0^2N^2\frac{a^4}{8d^6}\frac{\omega}{\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}\left(\cos\Phi-\cos(2\omega t-\Phi)\right)\vec{u}_3$$

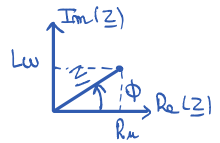
$\dot{\alpha} = C^{te}$ TMC : $\underbrace{J\ddot{\alpha}}_{0} = \Gamma_{laplace} + \Gamma$ $\Gamma = -\Gamma_{laplace}$

$$\langle\Gamma\rangle = m^2\mu_0^2N^2\frac{a^4}{8d^6}\frac{\omega}{\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}\cos\Phi$$ avec $\Phi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R_\mu}\right)$

8) $\langle P_m\rangle = \langle\Gamma\rangle\omega = m^2\mu_0^2N^2\frac{a^4\omega^2}{8d^6\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}\cos\Phi$

$$\langle P_{Joule}\rangle = \frac{1}{2}R_\mu I_m^2 = \frac{1}{2}R_\mu\left(\frac{\omega\mu_0 m N a^2}{2d^3\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}\right)^2 = R_\mu\frac{m^2\mu_0^2N^2a^4\omega^2}{8d^6(R_\mu^2+L^2\omega^2)}$$

$\tan\Phi = \frac{L\omega}{R_\mu}$



$\cos\varphi = \frac{R_\mu}{\sqrt{R_\mu^2+L^2\omega^2}}$

$$\langle P_m\rangle = R_\mu\frac{m^2\mu_0^2N^2a^4\omega^2}{8d^6(R_\mu^2+L^2\omega^2)}$$ $\Rightarrow$ $\langle P_m\rangle = \langle P_{Joule}\rangle$ en moyenne

Rq : $\left(R_\mu i + L\frac{di}{dt} = \mu_0\frac{Nma^2\omega}{2d^3}\sin(\omega t)\right)\times i \rightarrow R_\mu i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \underbrace{\mu_0\frac{Nma^2\omega}{2d^3}i\sin(\omega t)}_{-\Gamma_{laplace}\times\omega = -P_L = P_m\ (\Gamma\omega)}$

$P_{Joule} + \frac{dE_{mag}}{dt} = P_{meca}$ $\Delta E_{mag} = 0$ sur 1 période $(i(t) = i(t+T))$

$\rightarrow \langle P_{Joule}\rangle = \langle P_{meca}\rangle$