

Unités et analyse dimensionnelle

I. Dimension d'une grandeur physique

1. Définition
2. Dimensions fondamentales
3. Equation aux dimensions

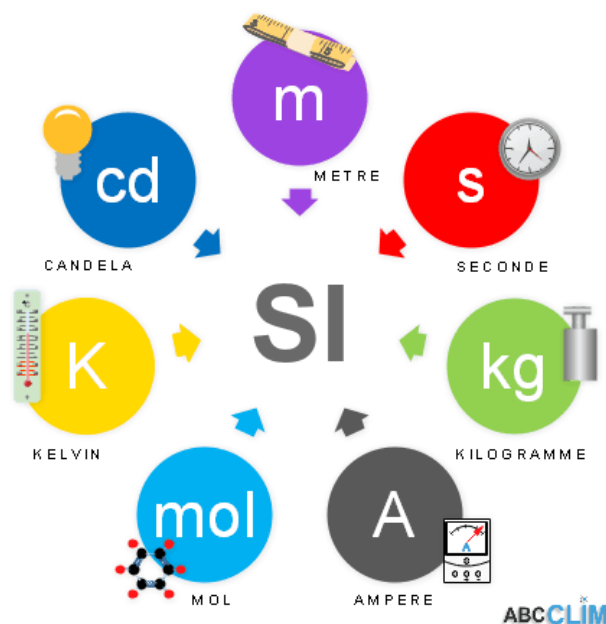
II. Unités du système international

1. Les unités de base
2. Définition actuelle des sept unités de base
3. Exemples d'unités dérivés du système international
4. Conversions et préfixes des unités du SI

5. Exemples d'unités hors du système international

III. Analyse dimensionnelle et homogénéité

1. Principe
2. Applications
 - 2.1 Déterminer la dimension d'une grandeur à partir d'une relation
 - 2.2 Vérifier l'homogénéité d'une relation
 - 2.3 Déterminer une relation



Ce qu'il faut savoir et savoir faire

- Savoir faire une application numérique et les conversions nécessaires
- Etablir une équation aux dimensions
- Déterminer la dimension ou l'unité SI d'une grandeur à partir d'une relation
- Vérifier l'homogénéité d'une relation
- Proposer une relation entre grandeurs à l'aide d'une analyse dimensionnelle

La NASA va enfin adopter le système métrique

Par Didier Müller, mercredi 24 janvier 2007



La NASA a finalement accepté de lancer ses futures missions lunaires en utilisant le système métrique décimal. Les propres scientifiques de l'Agence ont enfin eu gain de cause alors qu'ils en faisaient la demande depuis qu'une erreur de calcul due à une confusion entre *miles* et *kilomètres* avait provoqué l'échec de la mission d'une sonde martienne.

L'espace est devenu un business international et la NASA indique que seuls les Etats-Unis, la Birmanie et le Libéria utilisent toujours les miles pour mesurer les distances. L'agence spatiale, après des entretiens avec ses homologues de 15 autres nations, a annoncé la semaine dernière que le futur projet lunaire serait réalisé en utilisant uniquement le système métrique (et les unités SI).

En 1999, la sonde Mars Climat orbiter avait atteint Mars, mais était entrée sur une orbite beaucoup trop basse et s'était écrasée dès son premier passage au-dessus de la face cachée de la planète. La NASA avait plus tard révélé que ses ingénieurs s'étaient embrouillés lors de la simple conversion d'unités métriques en unités impériales (américaines !) d'une information orbitale.

La NASA a commencé à utiliser les mesures métriques pour quelques missions dès 1990, mais pour la plus grande partie d'entre elles, les navettes spatiales ou l'ISS par exemple, les miles, livres et gallons sont toujours de mise.

"Mon unité impériale favorite est le *slug*. La puissance de lancement de la navette est mesurée en slug", ironise Ben Quine, professeur d'ingénierie spatiale de l'université d'York. (Le slug est défini comme étant la masse qui, soumise à une force d'une livre, reçoit une accélération d'un pied par seconde par seconde).

Selon lui, le changement ne sera pas facile pour les américains. "Mais tout le monde doit faire attention avec les unités lors des conversions." Cependant il pense qu'à la longue, les calculs seront facilités. "Le pied est défini d'après la taille du pied d'un des rois d'Angleterre. Je ne me souviens pas lequel. Ce n'est vraiment pas une bonne façon d'envoyer des gens dans l'espace que de se baser sur la taille du pied d'un roi mort."

Source : <http://www.techno-science.net/?onglet=news&news=3656>

I. Dimension d'une grandeur physique

1. Définition

Une grandeur physique est caractérisée par une **dimension** qui traduit sa nature physique, par exemple : une longueur, un temps, etc... C'est l'approche qualitative, qui répond à la question : « **Qu'est-ce que c'est ?** »

2. Dimensions fondamentales

Le système international d'unités utilise sept grandeurs fondamentales indépendantes, permettant d'exprimer toutes les grandeurs physiques par produit et quotient : **longueur L, masse M, temps T, courant électrique I, température θ , intensité lumineuse J et quantité de matière N.**

3. Equation aux dimensions

Les lois de la physique permettent de relier les dimensions entre elles. En général, la dimension d'une grandeur X, notée entre crochets, s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel, appelé **équation aux dimensions** :

$$[X] = L^a M^b T^c I^d \theta^f J^g N^h$$

Exemples : D'un point de vue dimensionnel,

- Une vitesse v est le rapport entre une distance et un temps, $[v] = L \cdot T^{-1}$.
- Une accélération a est le rapport entre une vitesse et un temps : $[a] = \frac{[v]}{T} = L \cdot T^{-2}$
- Une force F est le produit d'une masse par une accélération $[F] = M[a] = M \cdot L \cdot T^{-2}$

Application 1 : Equations aux dimensions

Compléter le tableau suivant.

Dimension	Equivalence en dimensions fondamentales
Fréquence	
Force	
Travail d'une force	
Puissance d'une force	
Pression	

II. Unités du système international

La dimension d'une grandeur peut s'exprimer avec des unités différentes : une longueur peut, par exemple, s'exprimer en mètres, en miles, en années-lumière, etc...

L'unité est indispensable pour renseigner la valeur de la grandeur physique. C'est l'approche quantitative, qui permet de répondre à la question : « **Combien ça vaut ?** »

1. Les unités de base

Il est nécessaire de s'exprimer dans un langage universel, d'où la nécessité de se conformer au système d'unités internationales (SI). Il est fondé sur sept unités de base correspondant aux sept dimensions fondamentales.

Dimension	Unité SI
Longueur	Mètre (<i>m</i>)
Masse	Kilogramme (<i>kg</i>)
Temps	Seconde (<i>s</i>)
Intensité électrique	Ampère (<i>A</i>)
Température absolue	Kelvin (<i>K</i>)
Intensité lumineuse	Candela (<i>cd</i>)
Quantité de matière	Mole (<i>mol</i>)



2. Définition actuelle des sept unités de base

LA SECONDE

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s^{-1} .

LE KELVIN

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, k , égale à $1,380\,649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en J K^{-1} , unité égale à $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h , c et $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

LE MÈTRE

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c , égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en m s^{-1} , la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

LA MOLE

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A , lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1} .

LE KILOGRAMME

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h , égale à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en J s , unité égale à $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

LA CANDELA

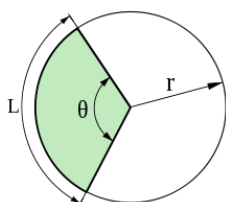
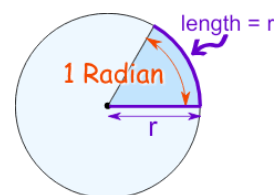
La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$, K_{cd} , égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1} , unité égale à cd sr W^{-1} , ou $\text{cd sr kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^3$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h , c et $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

L'AMPÈRE

L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e , égale à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à A s, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Remarque :

Un angle est une grandeur sans dimension qui s'exprime en radian ou en degré. Le radian est l'angle plan, qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle. Un cercle complet représente un angle de $2\pi \text{ rad}$.



Un arc de cercle de rayon r , vu sous un angle θ exprimé en radians possède une longueur $L = r\theta$.

Les autres unités, ou unités dérivées, sont obtenues en combinant les unités de base d'après les relations algébriques qui lient les grandeurs correspondantes.

3. Exemples d'unités dérivés du système international

Application 2 : Unités dérivées

Compléter le tableau suivant.

Dimension	Unité SI	Dimension	Unité SI
Surface		Force	
Volume		Energie, travail	
Vitesse		Puissance	
Accélération		Pression	
Période		Charge électrique	
Fréquence		Tension électrique	
Masse volumique		Résistance	

4. Conversions et préfixes des unités du SI

Pour les applications numériques et sauf indication contraire, une relation n'est valable numériquement que si l'on utilise les unités du système international.

Préfixe	Symbole	Facteur
péta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
déca	da	10^1

Préfixe	Symbole	Facteur
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

5. Exemples d'unités hors du système international

Il existe de nombreuses unités en dehors du SI qui présentent un intérêt historique ou qui sont encore utilisées dans un domaine spécialisé (comme le baril de pétrole) ou dans certains pays (comme le pouce, le pied ou le yard). Leur usage est déconseillé dans les travaux scientifiques et techniques modernes.

Noms	Symboles	Valeurs
minute	<i>min</i>	60 s
heure	<i>h</i>	3600 s
jour	<i>j</i>	86 400 s
tour	<i>tr</i>	2π rad
degré	$^{\circ}$	$(\pi/180)$ rad
minute d'angle	'	$(\pi/10\,800)$ rad
seconde d'angle	"	$(\pi/648\,000)$ rad
litre	<i>L</i>	10^{-3} m ³
tonne	<i>t</i>	10^3 kg

Noms	Symboles	Valeurs
unité de masse atomique	<i>u</i>	$1,6605402 \cdot 10^{-27}$ kg
unité astronomique	<i>ua</i>	$149\,600 \cdot 10^6$ m
<u>mile</u>	<i>mi</i>	1.60934 km
angström	Å	10^{-10} m
are	<i>a</i>	10^2 m ²
hectare	<i>ha</i>	10^4 m ²
bar	<i>bar</i>	10^5 Pa
atmosphère	<i>atm</i>	101325 Pa
électronvolt	<i>eV</i>	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$ J

III. Analyse dimensionnelle et homogénéité

1. Principe

Toute relation entre plusieurs grandeurs doit être homogène, c'est-à-dire que les deux membres d'une égalité doivent nécessairement avoir la même dimension.

On vérifie l'homogénéité d'une relation en faisant une **analyse dimensionnelle**.

QUELQUES REGLE SIMPLES

- On ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même dimension.
- L'argument des fonctions mathématiques comme *cos, sin, tan, ln, exp, log ...* doit être sans dimension, ces fonctions sont elles-mêmes sans dimension.
- La dimension du produit (quotient) de deux grandeurs est le produit (quotient) des dimensions de chacune des grandeurs
- Les 2 membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence sont de même nature (scalaire ou vectorielle).

Une relation non homogène est toujours fausse mais une relation homogène n'est pas nécessairement juste (erreur de signe, de coefficient numérique...).

2. Applications

2.1 Déterminer la dimension d'une grandeur à partir d'une relation

Pour cela, on isole la grandeur étudiée et on remplace les grandeurs connues par leur dimension ou unité SI.

Application 3 : Dimension d'un coefficient de frottement

La norme de la force de frottement qu'exerce un fluide sur un solide peut dans certaines conditions s'écrire $F = kv$, où v est la vitesse relative du solide dans le fluide. Quelle est la dimension de k ?

2.2 Vérifier l'homogénéité d'une relation

Pour chaque membre de l'égalité, on remplace chaque grandeur par sa dimension exprimée en dimensions fondamentales et on vérifie que l'on obtient la même chose.

Application 4 : Vitesse de propagation d'une onde le long d'une corde

La vitesse de propagation c d'une onde se propageant le long d'une corde tendue a pour expression $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec μ la masse linéique de la corde et T la tension de la corde. Vérifier que cette relation est homogène.

Application 5 : Juste ou faux ?

Un élève écrit $a = k \frac{v^2}{t}$ où a est une accélération, k une grandeur sans dimension, t un temps et v une vitesse. La relation est-elle homogène ?

2.3 Déterminer une relation

Lorsque l'on a identifié les grandeurs physiques pertinentes d'un problème, on peut trouver une formule liant ces grandeurs à un facteur près par simple analyse dimensionnelle.

On remplace dans l'égalité chaque grandeur par sa dimension exprimée en dimensions fondamentales et on pose un système d'équations à plusieurs inconnues où celles-ci sont les puissances affectées aux grandeurs.

Application 6 : Période du pendule simple

On observe que la période T d'un pendule placé dans le vide dépend uniquement de la longueur l du fil et de g , l'accélération de pesanteur.

Proposer une relation de la forme : $T = kl^a g^b$ avec k, a et b des nombres sans dimension.