

Devoir surveillé n° 1

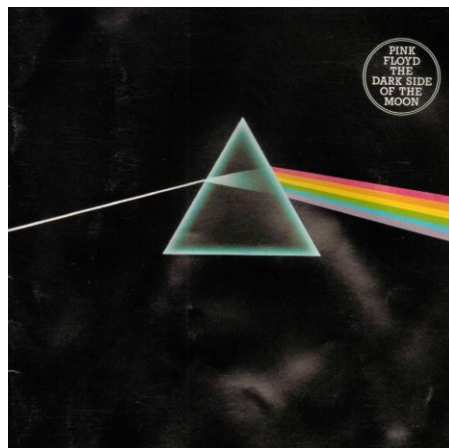
Durée : 2 heures

Minimum de déviation

- ✓ La calculatrice est autorisée.
- ✓ Les réponses doivent être **justifiées**.
- ✓ Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.
- ✓ Toute réponse non homogène ne sera pas corrigée.
- ✓ **Critères de présentation** : un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.
Clarté de l'expression	Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1 ^{ère} lecture
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.
Mise en évidence des résultats	Résultats encadrés ou soulignés
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.

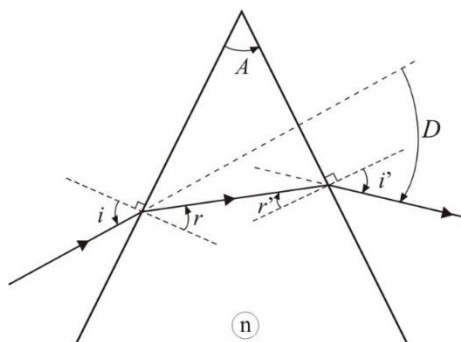
1^{ère} partie : Déviation minimale par un prisme



Etude de la déviation d'un rayon lumineux

- Q1.** Rappeler, en précisant bien ce que sont les différentes grandeurs sur un schéma, les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et pour la réfraction.

On considère un prisme dans l'air (indice assimilé à 1) d'angle $A = 60^\circ$ constitué d'un verre d'indice n . On appelle déviation (notée D) l'angle entre le rayon transmis par le prisme et le rayon incident.



Déviation d'un rayon lumineux par un prisme.

On notera i et i' les angles d'incidence à l'entrée et à la sortie du prisme, ainsi que r et r' les angles des rayons réfractés à l'intérieur du prisme respectivement côté entrée et côté sortie.

La convention de signe est trigonométrique pour A , i , et r , et horaire pour i' , r' et D .

- Q2.** Quelles sont, pour un rayon incident situé dans le plan perpendiculaire à l'arête du prisme, les relations entre i et r , et i' et r' ?
- Q3.** Etablir la relation géométrique entre A , r et r' .
- Q4.** Etablir l'expression de D en fonction de i et i' sous la forme : $D = i + i' - Cte$ où Cte est une constante que l'on exprimera.

Pour une valeur donnée de l'indice n , la déviation D est en fait seulement fonction de i . Lorsque i varie, la déviation D présente une valeur minimale, notée D_m dans la suite.

- Q5.** Exprimer la dérivée $\frac{di'}{di}$ en fonction de i , i' , r , r' .
- Q6.** En déduire qu'au minimum de déviation : $\cos i \cos r'$ et $\cos i' \cos r$ sont liés par une relation simple.

Que la relation précédente ait été démontrée ou non, on admet qu'au minimum de déviation, $i = i'$.

- Q7.** Exprimer l'angle d'incidence au minimum de déviation puis établir la relation liant n et D_m :
- $$n \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right).$$

Influence de la longueur d'onde

Le prisme est fabriqué dans un matériau dont l'indice est donné en fonction de la longueur d'onde λ dans le vide (exprimée en nanomètre) dans le tableau suivant.

$\lambda(\text{nm})$	404,6	435,8	486,1	508,6	546,1	578,0	643,8	706,5
n	1,590	1,581	1,572	1,568	1,564	1,561	1,556	1,552

Variations de l'indice du matériau en fonction de la longueur d'onde.

Les couples de valeurs (n, λ) du tableau précédent s'ajustent sous la forme : $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$, a et b étant deux constantes numériques.

- Q8.** Calculer les valeurs de a et b pour λ exprimé en nanomètre, en ne considérant que la première et la dernière colonne de la liste précédente. (On prendra soin de respecter le nombre de chiffres significatifs).

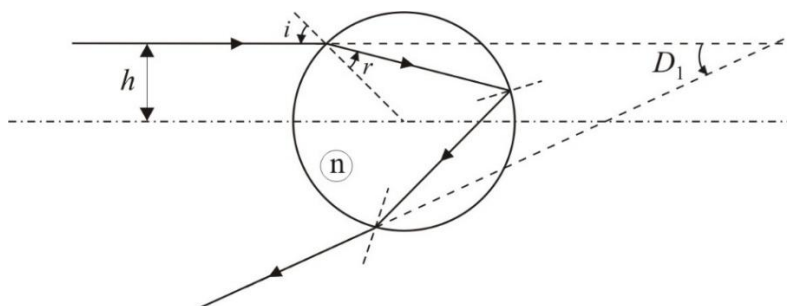
Dans la suite de cet exercice, on suppose que l'on éclaire le prisme avec un angle d'incidence i égal à la valeur, notée i_0 , correspondant au minimum de déviation pour $\lambda = 578,0 \text{ nm}$.

- Q9.** Pourquoi le minimum de déviation D_m est-il fonction de la longueur d'onde ? Calculer numériquement l'angle d'incidence i_0 en degrés donnant lieu à un minimum de déviation pour λ .
- Q10.** Montrer que dans ces conditions, la dispersion angulaire $\frac{dD_m}{d\lambda}(\lambda)$ est donnée par : $\frac{dD_m}{d\lambda} = K(D_m) \frac{dn}{d\lambda}$ où $K(D_m)$ est une fonction que l'on exprimera.
- Q11.** Calculer numériquement $K(D_m)$ pour λ , puis, en assimilant $\frac{dD_m}{d\lambda}$ au rapport $\Delta D_m / \Delta \lambda$ où $\Delta \lambda \approx 400 \text{ nm}$ (étendue approximative du spectre visible), calculer numériquement $|\Delta D_m|$, l'angle d'ouverture du faisceau émergent en degrés.

2^{ème} partie : Déviation minimale dans un arc-en-ciel

Trajet des rayons sous une réflexion

On considère une goutte d'eau sphérique, de rayon R et d'indice de réfraction n . Le trajet d'un rayon lumineux incident situé à une hauteur h de l'axe de la goutte associée à l'angle d'incidence i est le suivant :

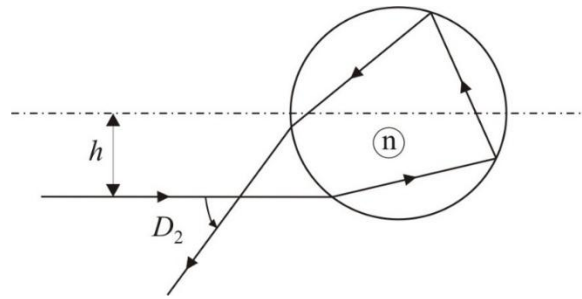


On note D_1 l'angle entre la direction incidente et la direction du rayon sortant, obtenue après une réflexion sur le fond de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i . On pose $x = \frac{h}{R}$ ($0 < x < 1$).

- Q12.** Reproduire le schéma de la goutte et exprimer les angles mesurés par rapport à la normale en fonction de i et/ou r .
- Q13.** Etablir l'expression de D_1 en fonction de i et de r sous la forme $D_1 = pr - 2i$ où p est un nombre entier que l'on déterminera.
- Q14.** Exprimer $\sin i$ et $\sin r$ en fonction de x et n . En déduire l'expression de D_1 en fonction de x et n .
- Q15.** Montrer que $D_1(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur $x_m = k\sqrt{4 - n^2}$ où k est un facteur numérique à déterminer. On donne $(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$.
- Q16.** On note $D_{1m} = D_1(x_m)$. Calculer numériquement x_m et D_{1m} (en degré) dans le cas de l'eau, sachant que $n = 1,337$.

Trajet des rayons sous deux réflexions

On considère maintenant un rayon lumineux qui subit deux réflexions à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte.



On admet que l'angle de déviation D_2 est donné par la relation $D_2 = \pi + 2i - 6r$ et qu'il présente un extremum D_{2m} lorsque x vaut $\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$.

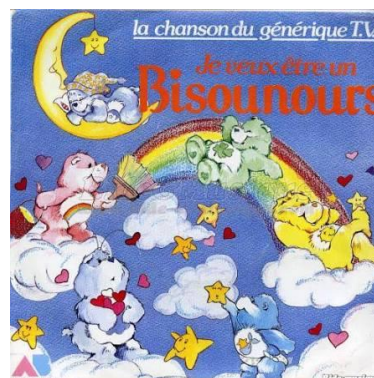
Q17. Calculer numériquement en degré, toujours dans le cas de l'eau, cet extremum D_{2m} .

Caractéristiques de l'arc-en-ciel

Il s'agit ici de déduire les caractéristiques de l'arc-en-ciel, formé par la rétrodiffusion de la lumière solaire dans des gouttes d'eau sphériques des mécanismes présentés ci-dessus. On observe un arc lumineux (dit arc primaire) et parfois un second d'intensité plus faible (dit arc secondaire).

- Q18.** Pourquoi les arcs visibles se forment-ils dans la direction correspondant au minimum de déviation ?
- Q19.** Préciser sur un schéma les positions relatives du soleil, de l'observateur et d'une goutte d'eau. Pourquoi voit-on un arc lumineux (dit arc primaire) et parfois un second d'intensité plus faible (dit arc secondaire) ? Que valent les rayons angulaires moyens des deux arcs ? L'arc secondaire est-il externe ou interne à arc primaire ?
- Q20.** Les réflexions dans la goutte sont-elles totales ? Expliquer alors que l'arc secondaire est moins lumineux.
- Q21.** Calculer, pour l'arc-en-ciel primaire, $D_{1m}(\lambda_v)$ pour la radiation violette ($\lambda_v = 400 \text{ nm}$, $n = 1,34356$) et $D_{1m}(\lambda_r)$ pour la radiation rouge ($\lambda_r = 700 \text{ nm}$, $n = 1,33052$).
- Q22.** Le rouge est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc primaire ?

On pourrait vérifier que l'ordre des couleurs est inversé pour l'arc secondaire...



FIN