Chapitre 6

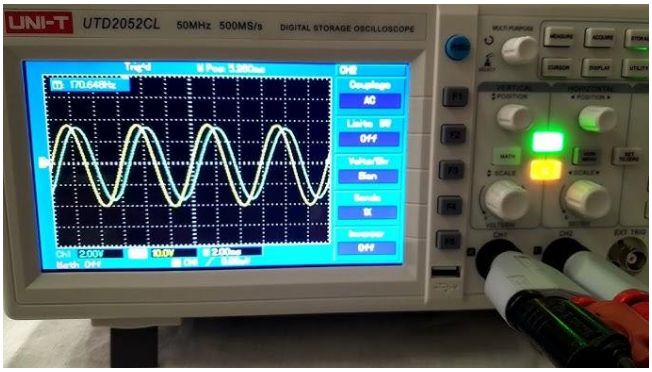
Oscillateurs harmoniques

I. Les oscillateurs harmoniques non amortis (OHNA)

1. Définition
2. Description d'une grandeur sinusoïdale
3. Equation différentielle caractéristique
4. Exemple électrique : le circuit LC
   - 4.1 Etude du circuit LC en régime libre
   - 4.2 Etude énergétique du régime libre

II. Oscillateurs harmoniques amortis (OHA)

1. Etude du circuit RLC
2. Modèle de l'oscillateur harmonique amorti
3. Solutions de l'équation différentielle
   - 3.1 Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique
   - 3.2 Cas $\Delta > 0$: Régime apériodique
   - 3.3 Cas $\Delta = 0$: Régime apériodique critique
4. Bilan énergétique



Oscillations électriques



Mécanisme de montre



Pendule de Foucault

On trouve des oscillateurs dans toutes les branches de la Physique et les exemples d'oscillateurs sont nombreux : pendule, amortisseur de voiture, corde de guitare, circuits électriques, il existe même des réactions chimiques oscillantes…

Un système est un oscillateur si au moins l'une des grandeurs qui le caractérise évolue de manière périodique ou pseudo-périodique autour d'une valeur centrale. L'oscillateur harmonique est un cas particulier d'oscillateur. Un système est un oscillateur harmonique si les grandeurs vibratoires qui le décrivent évoluent de manière sinusoïdale en fonction du temps.

Dans ce cours nous allons étudier les modèles de l'oscillateur harmonique non amorti puis de l'oscillateur harmonique amorti à partir de l'étude d'un oscillateur électrique.

La forme des équations obtenues et donc les méthodes de traitement mathématique des équations sont générales, elles s'appliqueront à d'autres types d'oscillateurs, notamment mécaniques.

« Étudier un oscillateur, c'est apprendre à voir la même équation mathématique derrière le mouvement d'un amortisseur de voiture et le signal d'une antenne radio. »

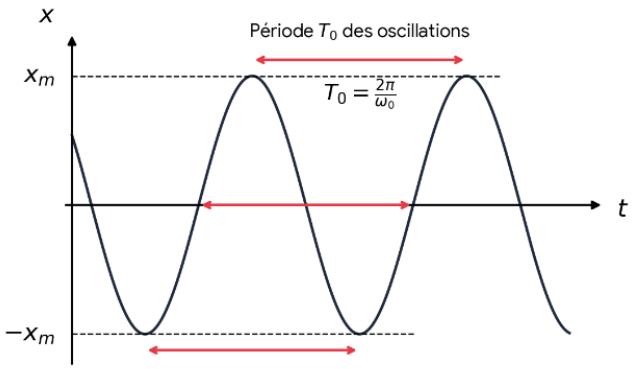
I. Les oscillateurs harmoniques non amortis (OHNA)

1. Définition

Un oscillateur harmonique non amorti est décrit, à une constante près, par une fonction sinusoïdale.

2. Description d'une grandeur sinusoïdale

Considérons une grandeur sinusoïdale : $\boldsymbol{x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

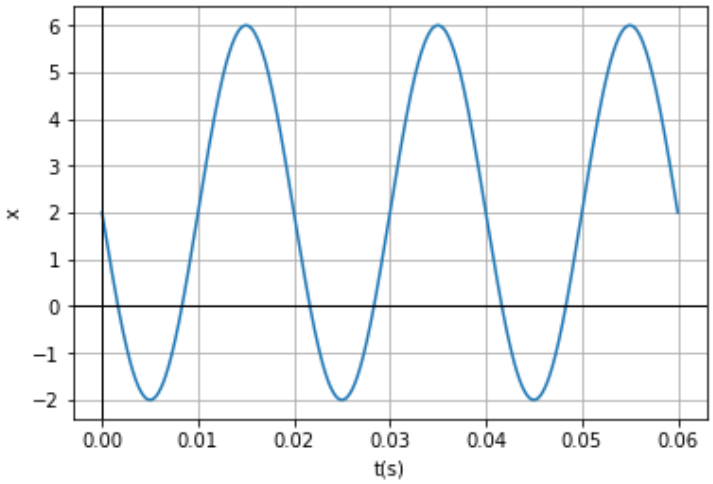


- $\boldsymbol{x_m}$ **est l'amplitude du signal sinusoïdal**
- $\boldsymbol{T_0}$ **est la période :** la période T du signal périodique quelconque est le plus petit intervalle de temps au bout duquel se reproduit le signal identique à lui-même : $x(t) = x(t + T_0)$.
- $\boldsymbol{f_0 = 1/T_0}$ est la fréquence en Hz : nombre de périodes par seconde
- $\boldsymbol{\omega_0}$ **est la pulsation du signal sinusoïdal :** $\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}}$, *elle peut être interprétée comme la vitesse angulaire lors d'un mouvement circulaire.*
- $\boldsymbol{(\omega_0 t + \varphi)}$ **est la phase instantanée (ou phase à l'instant** $\boldsymbol{t}$**).**
- $\boldsymbol{\varphi}$ **est la phase à l'origine (sa valeur est liée au choix de l'origine des temps) :** $\boldsymbol{x(0) = x_m \cos \varphi}$

Remarque : Un tel signal peut également se mettre sous la forme : $x(t) = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$ *avec* $A = x_m\,cos\,\varphi\,;\, B = -x_m\,sin\,\varphi\,;\, x_m = \sqrt{A^2 + B^2}\,;\, tan\,\varphi = -\frac{B}{A}$

Application 1 : Oscillateur harmonique non amorti

Donner l'expression $x(t)$ du signal suivant en précisant son amplitude, sa période, sa fréquence et la phase à l'origine (supposée dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).



3. Equation différentielle caractéristique

Les oscillations peuvent se faire autour d'une valeur constante, notée dans la suite du cours x_∞.

Dans ce cas, pour un OHNA de paramètre $x(t)$: $x(t) = x_\infty + x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

On peut remarquer que :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -x_\mathrm{m}\,\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \ddot{x}(t) = -x_\mathrm{m}{\omega_0}^2\,cos(\omega_0 t + \varphi) = -{\omega_0}^2\,(x(t) - x_\infty)$$

On appelle oscillateur harmonique non amorti tout système oscillant dont le paramètre $x(t)$ vérifie une équation différentielle du 2nd ordre de la forme :

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_\infty$$

Les solutions de cette équation sont de la forme : $x(t) = x_\infty + x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

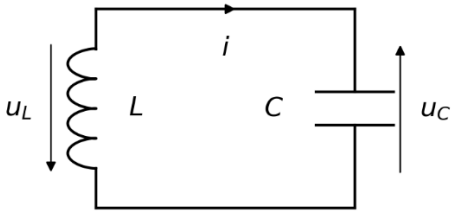
- **x_∞ est la valeur autour de laquelle $x(t)$ oscille** (solution particulière)
- **x_m est l'amplitude des oscillations** ($x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est la solution homogène)
- **ω_0 est la pulsation propre (en rad/s) : elle représente la pulsation des oscillations en l'absence de dissipation d'énergie ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la période propre, période des oscillations non amorties)**
- **φ est la phase à l'origine**

4. Exemple électrique : le circuit LC

4.1 Etude du circuit LC en régime libre

Application 2 : Circuit LC

On considère un condensateur initialement chargé sous une tension E, branché en série avec une bobine d'inductance L. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. On néglige ici tout phénomène de dissipation d'énergie (absence de résistances).



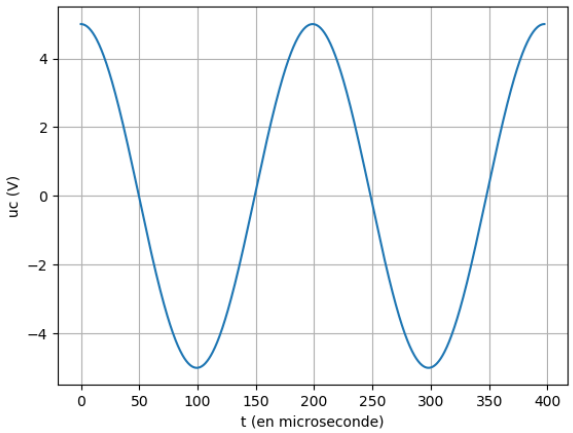
1) Déterminer l'équation différentielle du 2nd ordre vérifiée par la tension u_C.
2) Déterminer les conditions initiales $u_C(0)$ et $\frac{du_C}{dt}(0)$.
3) Résoudre l'équation différentielle.
4) Quelle est la pulsation des oscillations ? La période ?
5) Exprimer $i(t)$.

Le circuit LC est un oscillateur harmonique non amorti.

En régime libre, la tension u_c obéit à l'équation différentielle : $\ddot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = 0$

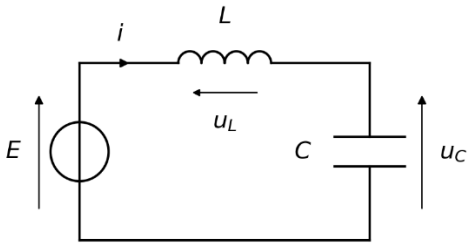
La pulsation des oscillations est la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Exemple : $E = 5\ V$, $C = 1\ \mu F$, $L = 1\ mH$



Remarque : pour obtenir directement l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, il faut dériver la loi des mailles.

Considérons le même circuit mais alimenté par une source de tension continue E.

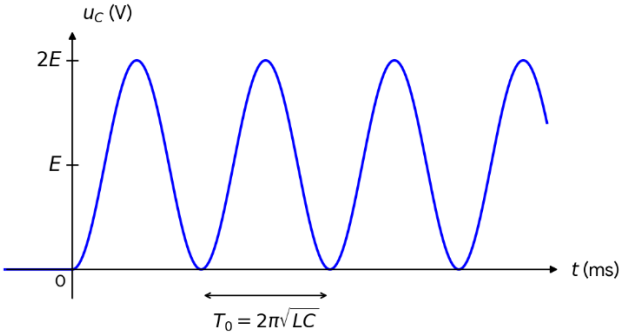


L'équation différentielle devient : $\ddot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} E$.

La solution est de la forme $u(t) = E + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

$u_c(t)$ oscille maintenant autour de E.

Cas d'un condensateur initialement déchargé :



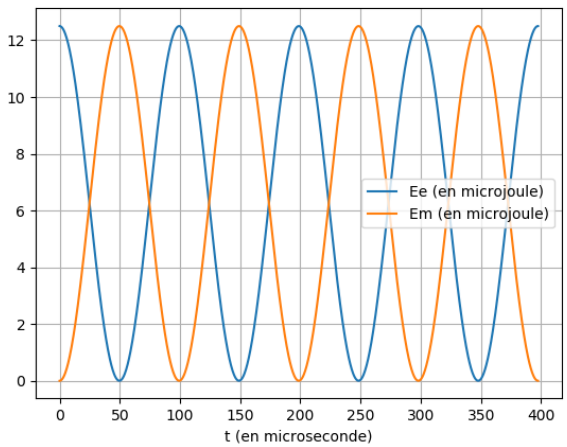
4.2 Etude énergétique du régime libre

L'énergie totale stockée dans le circuit LC est : $\boldsymbol{E(t) = E_e(t) + E_m(t) = \frac{1}{2} C u_c(t)^2 + \frac{1}{2} L i(t)^2}$

Application 3 : Etude énergétique du circuit LC

Exprimer l'énergie totale stockée dans le circuit LC précédent à l'instant t. Commenter.

Exemple : $E = 5\ V, C = 1\ \mu F, L = 1\ mH$



$E(t) = Cte = E(0)$: le transfert d'énergie entre la capacité et la bobine est total (il n'y a pas de pertes en l'absence de résistances).

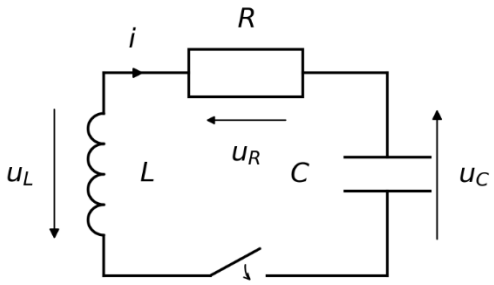
II. Oscillateurs harmoniques amortis (OHA)

Si on réalise le montage précédent, on observe des oscillations qui s'atténuent au cours du temps. Ceci est dû à une dissipation énergétique par effet Joule dans les résistances, celle du GBF et celle de la bobine. Si on rajoute une résistance dans le circuit et que la résistance est grande, les phénomènes dissipatifs sont trop importants et on observe alors **l'absence d'oscillations**.

Nous allons rendre compte de cette dissipation d'énergie, en introduisant une résistance dans le circuit précédent.

1. Régime libre du circuit RLC

Étudions le circuit RLC ci-dessous. On suppose le condensateur initialement chargé. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



Application 4 : Circuit RLC

Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C dans le circuit RLC précédent.

Le circuit RLC est un oscillateur harmonique dont, en régime libre, la tension u_c obéit à l'équation différentielle mise sous forme canonique :

$$\ddot{u}_c + \frac{L}{R}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = 0.$$

2. Modèle de l'oscillateur harmonique amorti

Un oscillateur harmonique amorti est décrit par une équation différentielle du 2nd ordre de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_\infty$$

- x_∞ **est la valeur de** x **en régime continu établi, lorsque t→∞**
- ω_0 **est la pulsation propre (rad/s) : pulsation caractéristique de l'oscillateur en l'absence de dissipation d'énergie (OHNA)**
- Q **est le facteur de qualité, nombre sans dimension qui caractérise l'amortissement**

Cas du circuit RLC série : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ***et*** $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

3. Solutions de l'équation différentielle

Pour exprimer **la solution homogène** de l'équation différentielle type, il faut résoudre l'équation caractéristique : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + {\omega_0}^2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$.

- **Si $\Delta < 0$ alors les racines, X_1 et X_2 sont complexes conjuguées.**
- **Si $\Delta > 0$ alors les racines X_1 et X_2 sont réelles et négatives.**
- **Si $\Delta = 0$ alors $X_1 = X_2 = X$ (racine double)**

Quel que soit le signe du discriminant, **la solution particulière** : $x_p = Cte = x_\infty$.

3.1 Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées : $X_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2}$

$X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\Omega$ et $X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\Omega$ avec $\Omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$ la pseudo-pulsation.

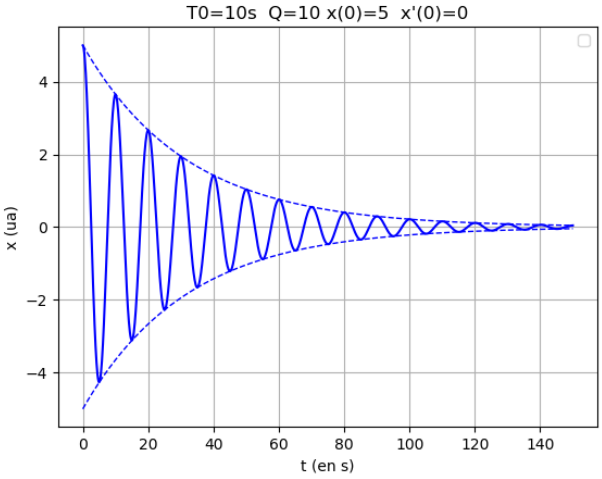
Si $Q > \frac{1}{2}$, le régime est pseudo périodique et les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] + x_\infty$$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$ la pseudo-pulsation des oscillations et x_∞ la valeur de x en régime continu établi.

Les constantes A et B se déterminent avec les conditions initiales.

Exemple : avec $x_\infty = 0$



On observe des oscillations amorties. On parle de régime pseudo-périodique car le régime est oscillatoire mais n'est pas périodique à cause de la diminution de l'amplitude due à l'amortissement. Le signal oscille entre deux enveloppes exponentielles de la forme $\pm Ke^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$.

La partie imaginaire positive Ω est la pseudo-pulsation des oscillations.

La pseudo période est : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$

Elle est supérieure à la période propre T_0 et elle en est d'autant plus proche que le facteur de qualité Q est grand donc que l'amortissement est faible.

L'amplitude des oscillations décroît en $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$, comme dans le chapitre précédent, **on peut poser un temps τ caractéristique de l'évolution de cette amplitude : $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.** Nous savons qu'au bout de 3τ cette amplitude est inférieure à 5% de l'amplitude initiale. On peut donc dire qu'au bout de cette durée, les oscillations ont quasiment disparu.

Avec le critère des 5 %, le régime transitoire pseudo-périodique a une durée environ égale à $3\tau = \frac{6Q}{\omega_0}$.

Le régime transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est grand.

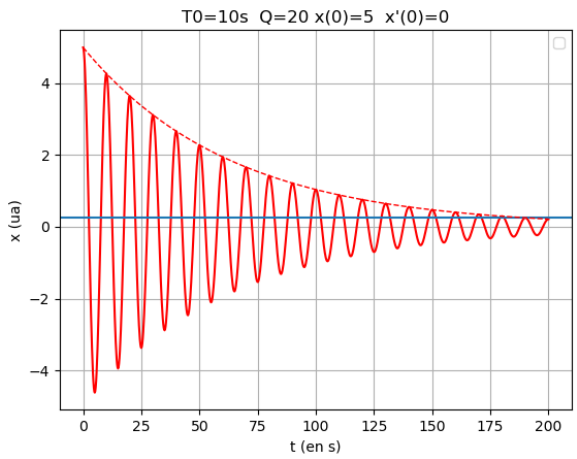
Estimons le nombre d'oscillations :

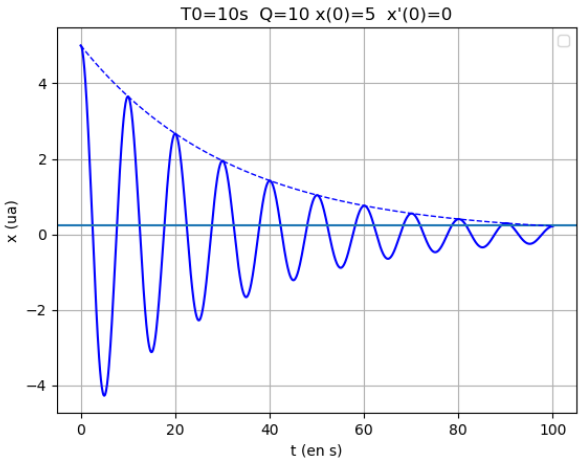
$$N \approx \frac{3\tau}{T} = \frac{\frac{6Q}{\omega_0}}{\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}} = \frac{6Q}{2\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

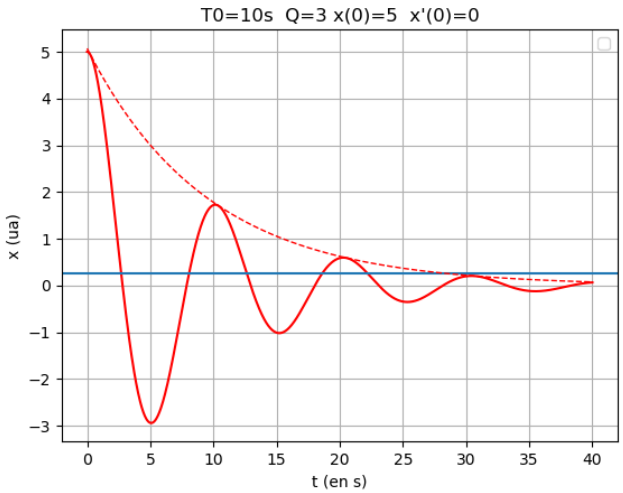
Si Q est suffisamment grand ($Q > 2$ suffit) alors $N \approx \frac{6Q}{2\pi} \approx Q$

Pour un oscillateur suffisamment peu amorti le nombre de pseudo-oscillations d'amplitude non négligeable (supérieure à 5 % de l'amplitude initiale) est voisin du facteur de qualité.

Ce résultat donne une méthode simple pour estimer le facteur de qualité d'un oscillateur : voir les courbes ci-dessous où la ligne horizontale coupe l'enveloppe à 5% de sa valeur initiale.







3.2 Cas Δ > 0 : Régime apériodique

$\Delta = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) > 0$ si $Q < \frac{1}{2}$. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et négatives :

$$\boldsymbol{X_1 = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)} \qquad \textbf{et} \qquad \boldsymbol{X_2 = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)}$$

Les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles et négatives.

La solution particulière est inchangée et vaut toujours x_∞.

La solution générale est de la forme : $x(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} + \boldsymbol{x_\infty}$

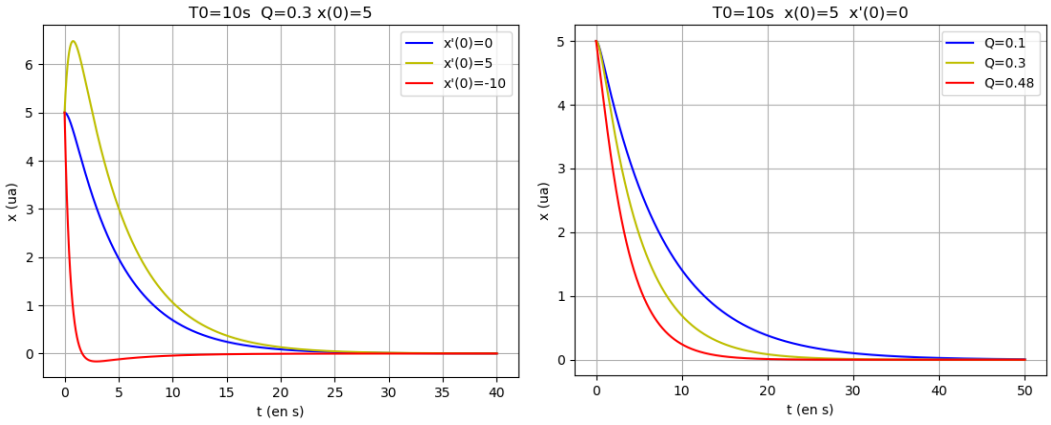
$x(t)$ est, à une constante x_∞ près, la somme de deux termes exponentiels qui tendent vers 0 : il n'y a **pas d'oscillations**, le régime est dit **apériodique**.

Si $Q < \frac{1}{2}$, le régime est apériodique et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\boldsymbol{x(t) = A\, e^{X_1 t} + B\, e^{X_2 t} + x_\infty}\ ,$$

où A et B sont déterminées par les conditions initiales et où X_1 et X_2 sont les racines réelles négatives de l'équation caractéristique.

Exemple : avec $\boldsymbol{x_\infty} = 0$



L'allure des courbes dépend des conditions initiales.

La durée du régime transitoire est d'autant plus courte que Q est grand.

Estimons cette durée dans le cas où Q est petit devant 1.

Les deux racines sont négatives : le premier terme décroît sur un temps typique $-\frac{1}{X_1}$ et le second sur $-\frac{1}{X_2}$.
Comme $|X_1| > |X_2|$,c'est le terme $B\ e^{X_2 t}$ qui décroît le plus lentement.

En faisant un DL à l'ordre 1 :

$$X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \approx -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - 1 - \frac{1}{2}4Q^2\right) \approx -Q\omega_0$$

On admet donc que la durée du régime transitoire lorsque le facteur de qualité est petit devant 1 est voisine de $\frac{3}{\omega_0 Q}$.

3.3 Cas Δ = 0 : Régime apériodique critique

$\Delta = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = 0$ si $Q = \frac{1}{2}$.

L'équation caractéristique admet une **racine double réelle et négative** : $\boldsymbol{X = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0}$

Dans ce cas la solution homogène de l'équation différentielle est de la forme $x_H(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$.

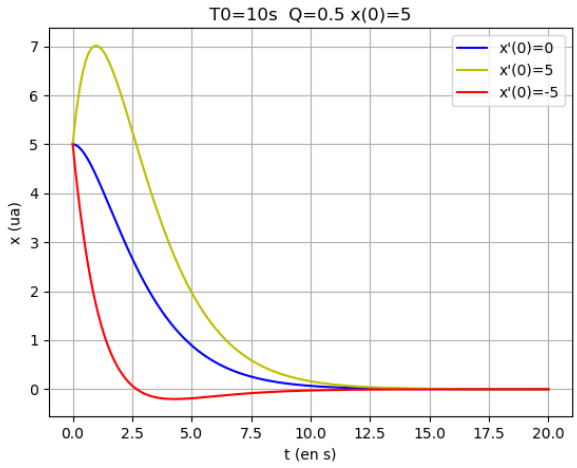
A et B sont fixées par les conditions initiales.

Si $\boldsymbol{Q = \frac{1}{2}}$, le régime est apériodique critique et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\boldsymbol{x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + x_\infty}$$

où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont déterminées par les conditions initiales.

Exemple : avec $\boldsymbol{x_\infty = 0}$



On peut poser un temps τ caractéristique de l'évolution de cette amplitude : $\frac{1}{\tau} = \omega_0$, la durée du régime transitoie (à 5%) est environ $\frac{3}{\omega_0}$.

C'est le régime non oscillant qui permet un retour à l'équilibre le plus vite.

4. Bilan énergétique

Étudions le circuit RLC précédent en régime libre. On suppose le condensateur initialement chargé.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

$$u_c + u_L + u_R = 0$$

$$u_c i + u_L i + u_R i = 0 \text{ (bilan de puissance)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}C\ {u_c}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\ i^2\right)+R\ i^2=0$$

On intègre entre $t=0$ et $t\to\infty$: $\Delta\left(\frac{1}{2}C\ {u_c}^2\right)+\Delta\left(\frac{1}{2}L\ i^2\right)+\int_0^\infty R\ i^2\ dt = 0$ (bilan d'énergie)

On reconnaît les énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine ainsi que celle dissipée par effet Joule.

A l'état initial : $u_c(0)=E$, le condensateur est chargé et $i(0)=0$, circuit ouvert et continuité imposée par la bobine.

A l'état final : $u_{c\infty}=0$, le condensateur s'est déchargé et $i_\infty=0$.

$\frac{1}{2}C\ E^2+\int_0^\infty R\ i^2\ dt = 0$

L'énergie initialement stockée dans le condensateur est au final intégralement dissipée par effet Joule.