Chapitre 7

Régime sinusoïdal forcé

I. Régime sinusoïdal forcé d'un système

1. Observations expérimentales
2. Interprétation mathématique
3. Description d'un signal sinusoïdal : rappels et compléments

II. Détermination de la solution particulière : méthode des complexes

1. Rappels sur les complexes
2. Représentation complexe d'un signal
3. Intérêt des complexes dans l'étude d'un régime sinusoïdal forcé

III. Etude d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal forcé

1. Impédance complexe
2. Dipôles usuels
   - 2.1 Conducteur ohmique
   - 2.2 Bobine idéale
   - 2.3 Condensateur idéal
3. Associations de dipôles et pont diviseurs
   - 3.1 Association en série
   - 3.2 Association en parallèle
4. Lois de Kirchhoff en notation complexe
5. Méthode générale

IV. Réponse en courant du circuit RLC série

1. Détermination du régime sinusoïdal forcé
   - 1.1 Intensité complexe
   - 1.2 Amplitude de l'intensité
   - 1.3 Déphasage de l'intensité par rapport à la tension
2. Résonance en intensité
3. Influence du facteur de qualité

V. Résonance aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série

1. Expression de la tension
   - 1.1 Tension complexe
   - 1.2 Amplitude
   - 1.3 Déphasage par rapport à la tension d'entrée
2. Résonance en tension (ou surtension)



On a jusqu'à présent étudié des circuits linéaires électriques alimentés par une source continue ou en régime libre. On a vu que ces systèmes sont décrits par des équations différentielles linéaires dont :

- La **solution homogène** décrit le caractère **transitoire** car elle tend rapidement vers 0 dans le cas d'un système stable.

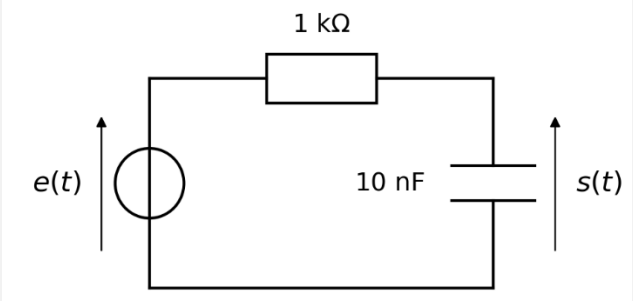
- La **solution particulière** correspond au **régime permanent**.

Que se passe-t-il maintenant si on impose à un système une excitation sinusoïdale ?

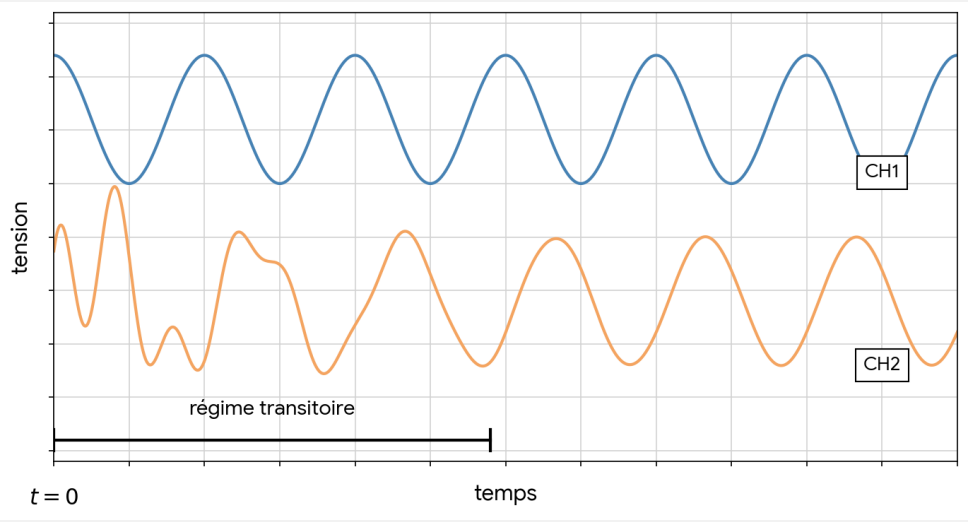
I. Régime sinusoïdal forcé d'un système

1. Observations expérimentales

Expérience : On observe la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RC série alimenté par une source de tension sinusoïdale de fréquence réglable.



Observations :



- Un régime sinusoïdal de même fréquence que la source s'établit après un certain temps, il est d'abord transitoire puis permanent.
- L'amplitude dépend de la fréquence de la source ainsi que le retard temporel entre la tension observée et la tension de la source.

2. Interprétation mathématique

Si on alimente un circuit linéaire avec un GBF délivrant un signal variable, le circuit est décrit par une équation différentielle linéaire dont le second membre est une fonction du temps.

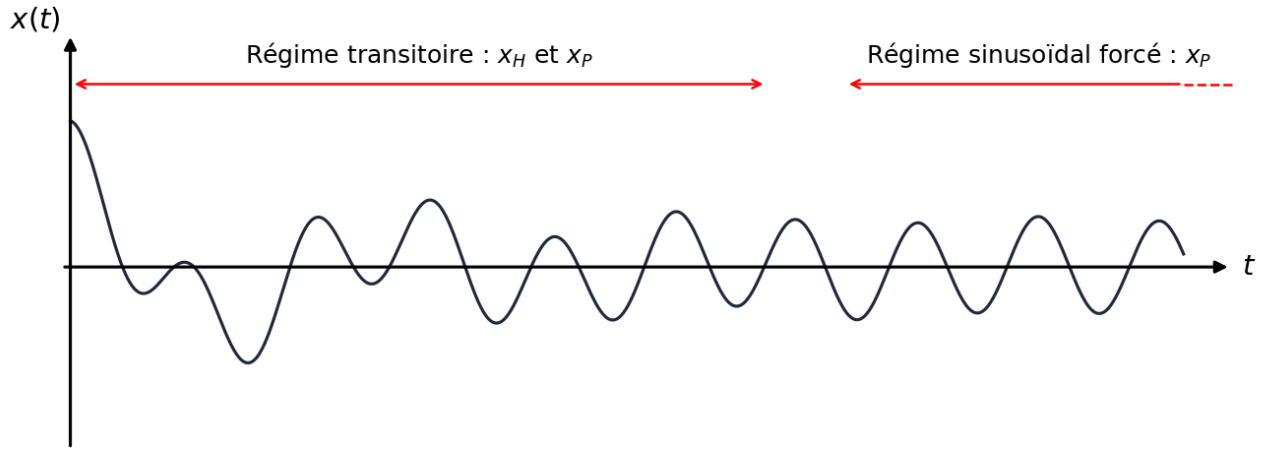
La réponse d'un système linéaire à une excitation est la superposition de 2 termes :

- **La solution homogène $s_H(t)$ de l'équation différentielle, dépendant des CI. Elle correspond à un régime transitoire qui tend rapidement vers 0 pour un système stable et qui correspond à l'évolution du système en l'absence de sources.**

- **La solution particulière $s_P(t)$ de l'équation différentielle, indépendante des CI mais dépendant du type d'excitation.**

Lorsque $|s_H|$ devient négligeable devant $|s_P|$, le régime est permanent (ou établi) et $s(t) \approx s_P(t)$. On parle alors de régime forcé.

Si la source délivre un signal sinusoïdal, on finit par observer un régime permanent sinusoïdal de même fréquence que l'excitation.



Le régime sinusoïdal forcé d'un circuit linéaire stable soumis à une excitation sinusoïdale est un régime permanent sinusoïdal de même pulsation que l'excitation qui s'établit après un régime transitoire.

On se concentre dans la suite sur l'étude de cette solution particulière sinusoïdale. Pour cela, on utilisera la méthode des complexes.

3. Description d'un signal sinusoïdal : rappels et compléments

- **Paramètres pour décrire la périodicité d'un signal :**
  - **La période** d'un signal périodique **T** est le plus petit intervalle de temps au bout duquel se reproduit le signal identique à lui-même : $s(t) = s(t + T)$.
  - **La fréquence** f est le nombre de périodes par seconde, soit $f = 1/T$ exprimée en Hertz (Hz).
  - **La pulsation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.**

- **Valeur moyenne d'un signal périodique sur une période : $S_{moy} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, dt$**

- **Valeur efficace d'un signal périodique : $S_{eff} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)^2\, dt}$**

Interprétation physique :
Sur une période, l'énergie dissipée par effet Joule dans une résistance R est :
$\Delta E_R = \int_{t_0}^{t_0+T} Ri(t)^2\, dt = R\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)^2\, dt = R\, {I_{eff}}^2\, T$

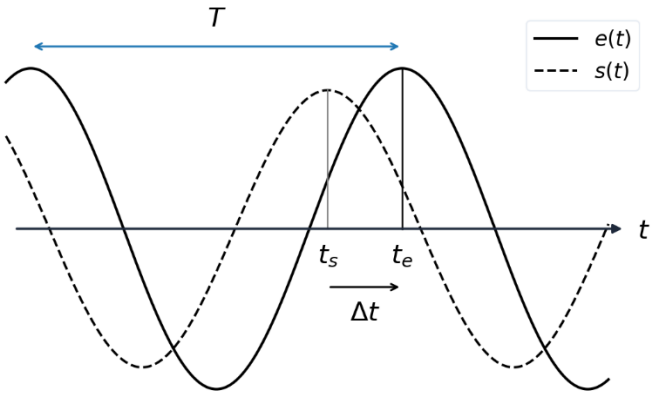
La valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps correspond à la valeur d'un courant continu ou d'une tension continue qui produirait le même effet thermique (même dissipation d'énergie par effet Joule) dans une résistance pendant le même temps.

Considérons une grandeur sinusoïdale d'amplitude S_m : $\boldsymbol{s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

La valeur moyenne d'un fonction sinusoïdale étant ½, la valeur efficace est : $\boldsymbol{S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$

- **Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence**

On observe un décalage (temporel) Δt entre le signal délivré par la source $e(t)$ et le signal étudié $s(t)$.



On peut traduire ce décalage temporel en angle : le **déphasage ($\Delta\varphi$).**

Soient 2 signaux sinusoïdaux de même fréquence.

$$\boldsymbol{s_1(t) = S_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)} \text{ et } \boldsymbol{s_2(t) = S_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)}$$

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ du signal 2 par rapport au signal 1 est l'écart entre les phases instantanées et donc entre les phases à l'origine : $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$.

Si Δt est le décalage temporel compté positivement, le déphasage en radians est tel que $|\Delta\varphi_{2/1}| = \frac{2\pi}{T}|\Delta t|$.

Si le signal 2 est en avance sur 1 : $\Delta\varphi_{2/1}$ est positif, si le signal 2 est en retard sur 1 : $\Delta\varphi_{2/1}$ est négatif.

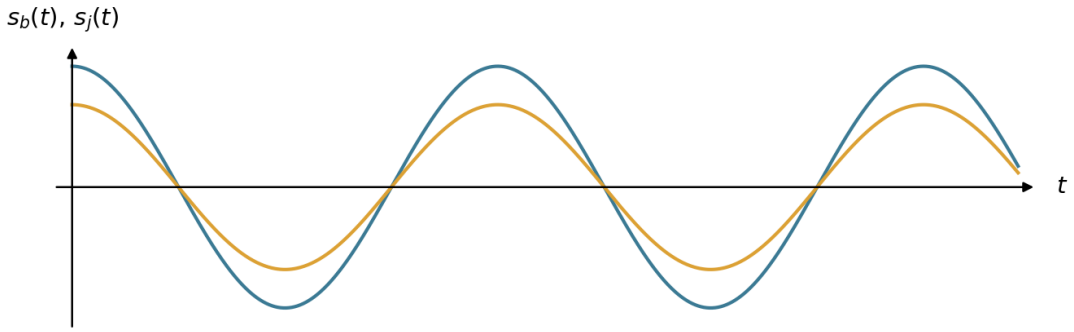
Un signal est en avance sur *un autre* s'il « passe par son maximum avant *l'autre* ».

Un déphasage $\Delta\varphi$ est bien sûr défini modulo 2π radians. *Dans l'exemple ci-dessus, on peut soit considérer que $s(t)$ est en avance de Δt ou que $e(t)$ est en avance de $T - \Delta t$.*

Si un signal s_2 est en avance de plus d'une demi-période sur un signal s_1, le déphasage $\Delta\varphi$ est théoriquement supérieur à π. **On choisit malgré tout de travailler entre $-\pi$ et $+\pi$.**
En choisissant de travailler entre $-\pi$ et $+\pi$, Δt est inférieur à une demi période donc on doit **considérer le maximum de $s(t)$ qui est le plus proche, temporellement parlant, du maximum de $e(t)$ considéré**.
Dans l'exemple ci-dessus, on choisira $s(t)$ en avance de Δt sur $e(t)$.

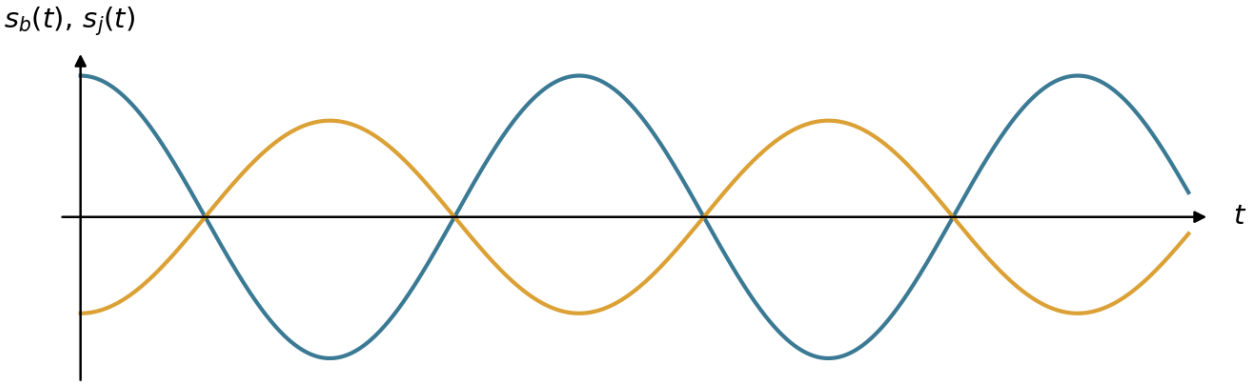
Cas particuliers :

- Si le décalage temporel est égal à un **nombre entier de période** : les signaux sont dits **en phase**.



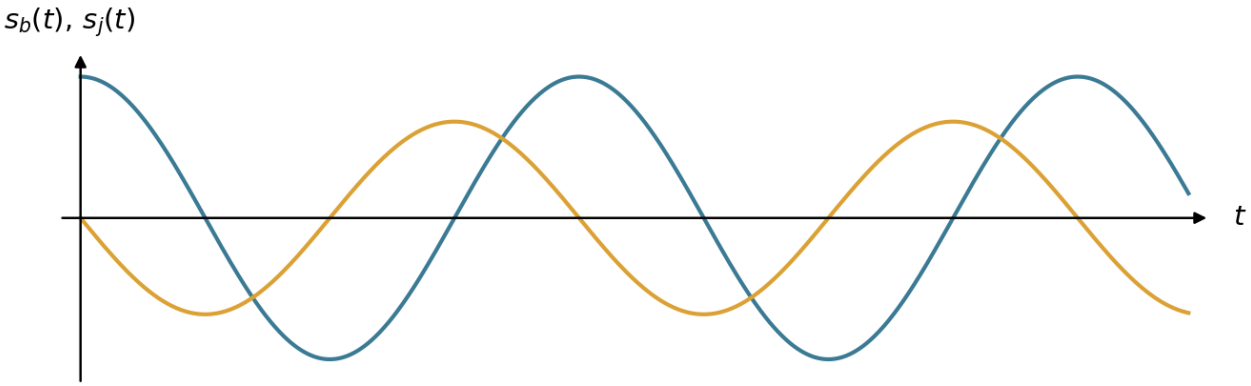
Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en phase.

- Si le décalage temporel est égal à **un nombre impair de demi période**, les signaux sont dits **opposition de phase**.



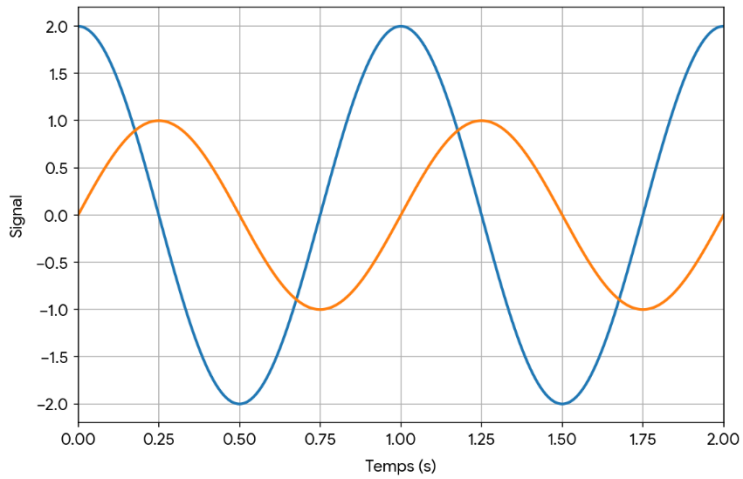
Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en opposition de phase.

- Si le décalage temporel est égal à $\frac{\pi}{2}[\pi]$, les signaux sont dits en **quadrature de phase**. Lorsqu'un signal est extrêmal l'autre est nul.



Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en quadrature de phase.

Application 1 : Etude de deux signaux sinusoïdaux



Mesurer le déphasage, supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$, du signal de plus faible amplitude par rapport au signal de plus grande amplitude.

II. Détermination de la solution particulière : méthode des complexes

1. Rappels sur les complexes

☞ **Voir fiche outil mathématique OM5 Les Complexes.**

2. Représentation complexe d'un signal

Pour faciliter la description des circuits en régime sinusoïdal forcé, on associe aux signaux réels des signaux complexes tels qu'à $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le signal complexe :

$$\underline{s}(t) = S_m\, e^{j(\omega t+\varphi)} \text{ (avec } j^2 = -1\text{)}.$$

On peut retrouver le signal réel grâce aux propriétés de l'exponentielle complexe : le signal réel est la partie réelle du signal complexe : $s(t) = Re\left(\underline{s}(t)\right)$

- L'amplitude est le module du signal complexe : $S_m = |\underline{s}(t)|$
- La phase instantanée est l'argument du signal complexe : $\omega t + \varphi = arg(\underline{s}(t))$

Pour s'affranchir de la partie temporelle, $e^{j\omega t}$, commune à l'excitation et à la réponse, on définit **l'amplitude complexe d'un signal : $\underline{S} = S_m\, e^{j\varphi}$**.

L'amplitude est alors le module de l'amplitude complexe et la phase à l'origine son l'argument :

$$S_m = |\underline{S}(t)| \text{ et } \varphi = arg(\underline{S})$$

Le déphasage entre 2 signaux de même fréquence est $\varphi_2 - \varphi_1 = arg\left(\underline{s_2}(t)\right) - arg\left(\underline{s_1}(t)\right)$.

3. Intérêt des complexes dans l'étude d'un régime sinusoïdal forcé

Pour un signal s(t) auquel on associe le signal complexe $\underline{s}(t) = S_m\, e^{j(\omega t+\varphi)}$:

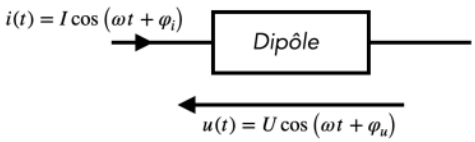
$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega\, S_m\, e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\, \underline{s}(t) \qquad \int \underline{s}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\, S_m\, e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}$$

- **En notation complexe, dériver par rapport au temps revient à multiplier le signal complexe par $j\omega$: $\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega\, \underline{s}(t)$.**
- **En notation complexe, intégrer par rapport au temps revient à diviser le signal complexe par $j\omega$: $\int \underline{s}(t)dt = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}$**

Traiter les circuits à l'aide de la méthode complexe va permettre de transformer les équations différentielles les décrivant en équations algébriques dans le corps des complexes.

III. Etude d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal forcé

1. Impédance complexe



On associe aux signaux réels $u(t) = U\,cos(\omega t + \varphi_u)$ *et* $i(t) = I\,cos(\omega t + \varphi_i)$, les signaux complexes $U\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}$ *et* $I\,e^{j(\omega t+\varphi_i)}$.

On généralise la loi d'Ohm vue pour les résistances à tout type de dipôle linéaire :

$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$ où $\underline{Z}$ est l'impédance complexe du dipôle.

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ est l'admittance complexe du dipôle.

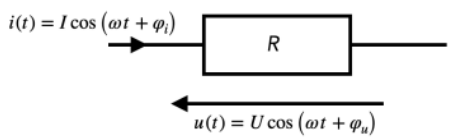
L'impédance d'un dipôle peut se mettre sous forme trigonométrique : $\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$

Son module est tel que : $|\underline{Z}| = \frac{U}{I}$, il s'exprime en Ω.

Son argument est tel que : $arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$ est le déphasage de la tension u(t) aux bornes du dipôle par rapport au courant i(t) le traversant.

2. Dipôles usuels

2.1 Conducteur ohmique

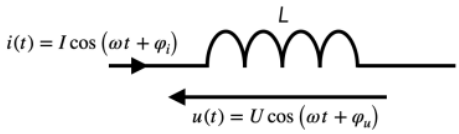


$$\underline{u} = R\,\underline{i}$$

$\underline{Z_R}$ = R

La tension aux bornes de la résistance et le courant la traversant sont en phase.

2.2 Bobine idéale



$$\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\,\underline{i}$$

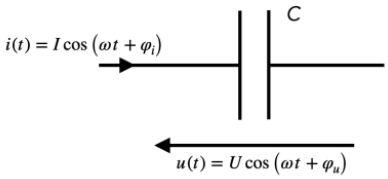
$\underline{Z_L}$ = jLω

La tension aux bornes de la bobine est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant la traversant.

Comportements limites :

- ***À très basse fréquence :*** $\left|\underline{Z_L}\right| = L\omega \to 0$ ***donc et la bobine se comporte comme un fil.***
- ***À très haute fréquence :*** $\left|\underline{Z_L}\right| = L\omega \to \infty$ ***donc et la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.***

2.3 Condensateur idéal



$$\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega\,\underline{u}$$

$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$

La tension aux bornes du condensateur est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant la traversant.

Comportements limites :

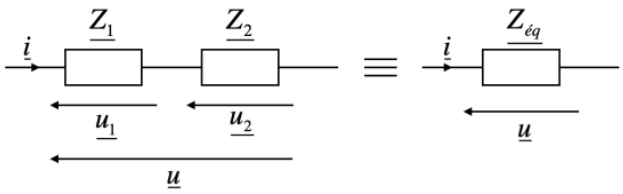
- ***À très basse fréquence :*** $\left|\underline{Z_C}\right| = \frac{1}{C\omega} \to \infty$ ***donc et la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.***
- ***À très haute fréquence :*** $\left|\underline{Z_C}\right| = \frac{1}{C\omega} \to 0$ ***donc et la bobine se comporte comme un fil.***

Les impédances d'un condensateur et d'une bobine dépendent de la pulsation, on peut comprendre alors que l'amplitude et le déphasage des grandeurs électriques dans des circuits contenant ce type de dipôles vont également dépendre de la pulsation.

3. Associations de dipôles et pont diviseurs

La relation qui relie les tensions et intensités complexes aux bornes d'un dipôle est analogue à la loi d'Ohm. On peut donc appliquer les mêmes relations qu'avec les résistances.

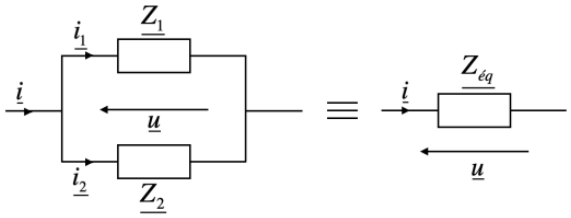
3.1 Association en série



$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$$

La tension aux bornes de l'impédance $\underline{Z_1}$ est $\underline{u_1} = \underline{u}\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$.

3.2 Association en parallèle

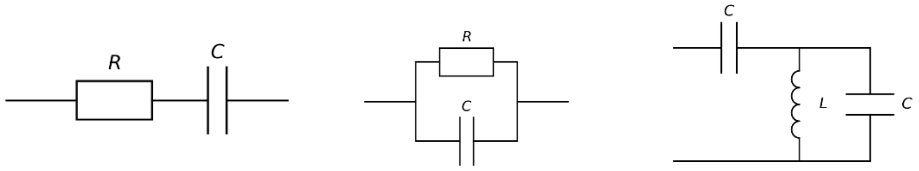


$$\frac{\mathbf{1}}{\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}}} = \frac{\mathbf{1}}{\underline{\boldsymbol{Z_1}}} + \frac{\mathbf{1}}{\underline{\boldsymbol{Z_2}}} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{Z_{eq}}} = \frac{\underline{\boldsymbol{Z_1 Z_2}}}{\underline{\boldsymbol{Z_1}} + \underline{\boldsymbol{Z_2}}}$$

L'intensité traversant l'impédance $\underline{Z_1}$ est $\underline{i_1} = \underline{i}\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$.

Application 2 : Impédance équivalente

Exprimer les impédances équivalentes des associations suivantes :



4. Lois de Kirchhoff en notation complexe

Les lois de Kirchhoff restent valables en régime variable dans le cadre de l'ARQS.

Dans le cas particulier du régime sinusoïdal forcé, on peut les écrire en notation complexe.

L'écriture des lois de Kirchhoff en notation complexe évite d'avoir à écrire et résoudre des équations différentielles et nous permet de déterminer directement le signal complexe correspondant au régime permanent.

5. Méthode générale

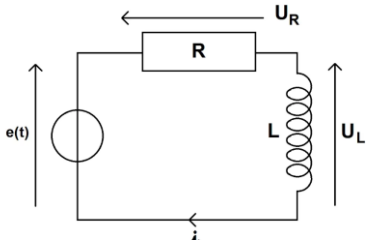
Une fois le signal complexe déterminé, à partir de ponts diviseurs et/ou des lois de Kirchhoff, on peut déterminer **facilement** amplitude et déphasage.

On utilisera pour cela le fait que :

- **L'amplitude est le module du signal complexe : $S_m = |\underline{s}(t)| = |\underline{S}|$**

- **La phase à l'origine est l'argument de l'amplitude complexe : $\varphi = arg(\underline{S})$**

Exemple : étude du courant dans un circuit RL



On note $\underline{e}$ et $\underline{i}$ les grandeurs complexes associées à la tension source $e(t) = E\cos(\omega t)$ et au courant $i(t)$ en régime forcé. Avec les complexes, on peut écrire directement :

$$\underline{Z_L}\,\underline{i} + R\underline{i} = \underline{e} \quad \Longrightarrow \quad R\underline{i} + jL\omega\underline{i} = \underline{e} \quad \Longrightarrow \quad \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega}$$

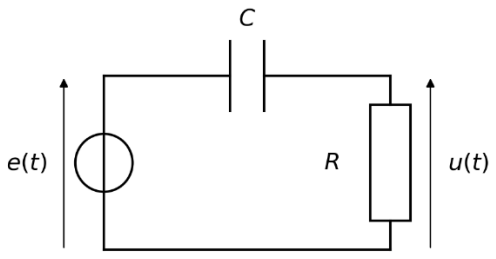
*On peut **facilement** en déduire l'amplitude de $i(t)$ et le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$:*

- $I = |\underline{i}| = \left|\frac{\underline{e}}{R+jL\omega}\right| = \frac{E}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$
- $arg(\underline{i}) = arg\left(\frac{\underline{e}}{R+jL\omega}\right) \Rightarrow \Delta\varphi_{i/e} = \varphi = arg(\underline{i}) - arg(\underline{e}) = -arg(R + jL\omega) = -arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Application 3 : Détermination d'une tension

Le circuit suivant est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale : $e(t) = E\cos(\omega t)$.

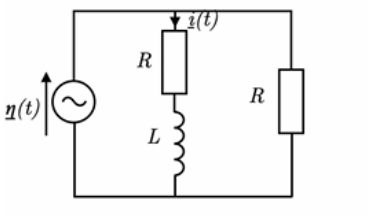


Exprimer :

- La grandeur électrique complexe $\underline{u}$.
- Son amplitude.
- Son déphasage par rapport à la grandeur source.

Application 4 : Détermination d'un courant

Le circuit suivant est alimenté par un générateur délivrant un courant sinusoïdal : $\eta(t) = I\cos(\omega t)$.

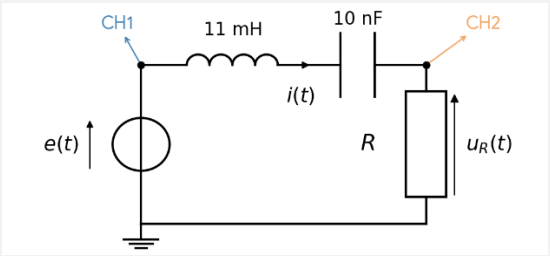


Exprimer :

- La grandeur électrique complexe $\underline{i}$.
- Son amplitude.
- Son déphasage par rapport à la grandeur source.

IV. Réponse en courant du circuit RLC série

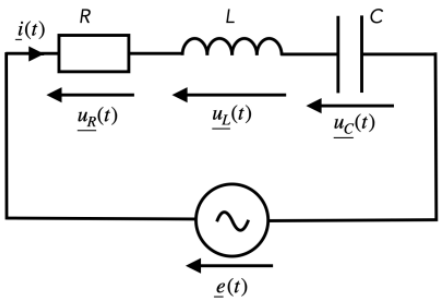
Expérience : On observe la tension aux bornes de la résistance d'un circuit RLC série alimenté par une source de tension sinusoïdale de fréquence réglable.



Observations : L'amplitude dépend de la fréquence de la source et passe par un maximum pour une pulsation particulière. A ce moment-là, la tension observée est en phase avec la tension de la source.

1. Détermination du régime sinusoïdal forcé

On étudie le circuit suivant :



On associe aux signaux réels $e(t) = E\cos(\omega t)$, $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$, $u_c(t) = U_{cm}\cos(\omega t + \varphi_u)$ les signaux complexes $E\,e^{j\omega t}$, $I_m\,e^{j(\omega t+\varphi_i)}$ et $U_{cm}\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}$.

1.1 Intensité complexe

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ la pulsation propre et Q = $\frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité du circuit RLC (cf. chapitre 6).

$$\underline{\boldsymbol{i}} = \frac{\underline{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{L\omega} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{C\omega}}\right)} = \frac{\underline{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{jQ}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}\right)\right)}$$

1.2 Amplitude de l'intensité

$$I_m = |\underline{i}| = \frac{U}{R\sqrt{\left(1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)}}$$

1.3 Déphasage de l'intensité par rapport à la tension

$$\varphi_i = arg(\underline{i}) - arg(\underline{e}) = -arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

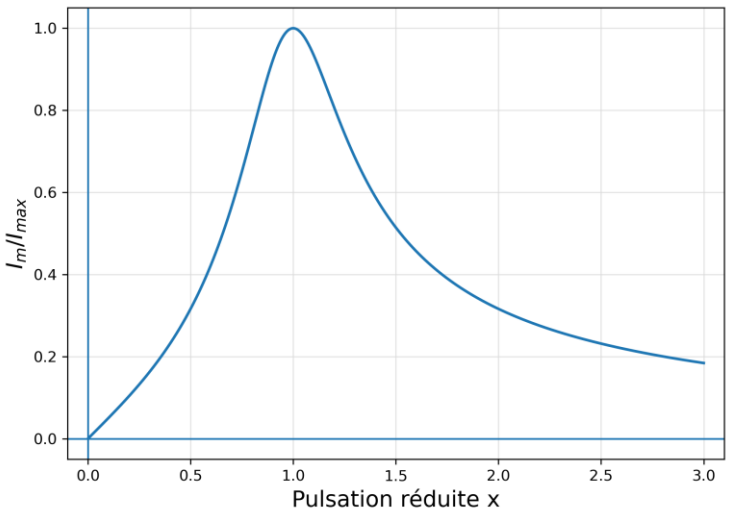
La partie réelle est positive : $\varphi_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\varphi_i = -arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

2. Résonance en intensité

Étudions comment l'amplitude se comporte avec la fréquence.

Pour cela, on trace $I(x)$. On prend $E = 4\,V, R = 100\,\Omega$ et $Q = 2$.



- L'amplitude tend vers 0 lorsque $\omega \to 0$ ou $\omega \to +\infty$. Ceci s'explique par le fait que dans chaque cas, soit la bobine soit le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

- Elle est maximale pour $x = 1$, c'est-à-dire quand le dénominateur devient minimal, autrement dit pour la pulsation pour lequel le terme entre parenthèses s'annule soit : $\omega = \omega_0$. Ce phénomène est appelé **résonance**.

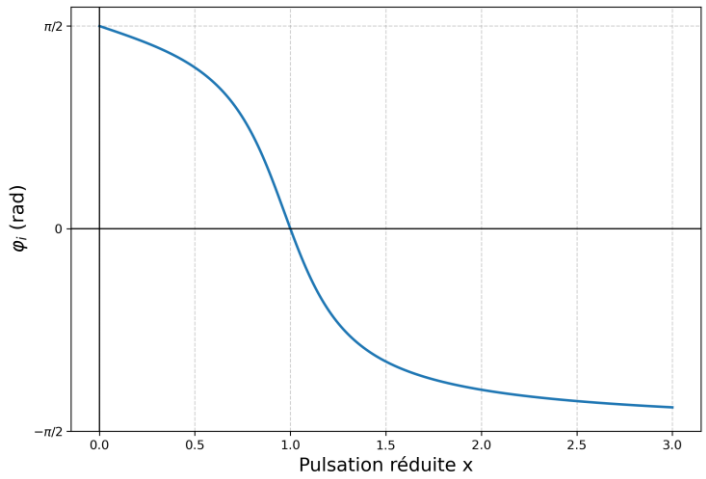
L'intensité maximale I_{max} vaut $I_{max} = \frac{E}{R}$. Tout se passe comme si l'inductance et le condensateur étaient absents à la résonance ($\underline{Z_C} + \underline{Z_L} = 0$).

L'amplitude de l'intensité dans le circuit est maximale pour une pulsation dite de résonance égale à la pulsation propre du circuit.

Ce phénomène de résonance est observable lorsqu'on étudie un oscillateur en régime sinusoïdal forcé.

Étudions maintenant comment le déphasage se comporte avec la fréquence.

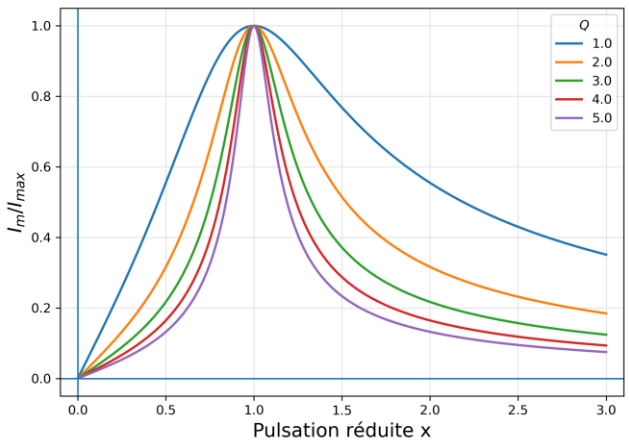
Pour cela, on trace $\varphi(x)$. On prend $E = 4\,V, R = 100\,\Omega$ et $Q = 2$

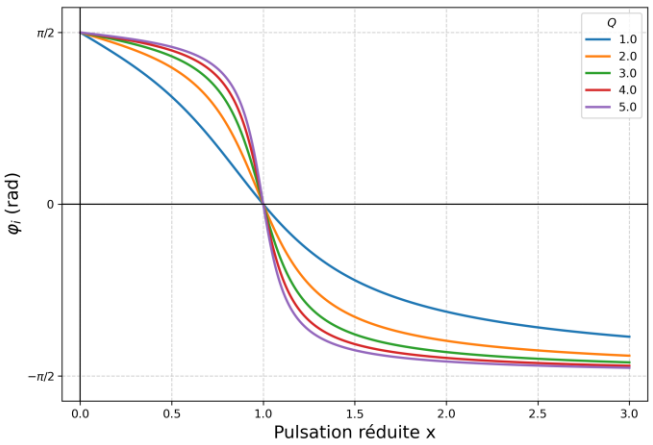


- Le déphasage tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $\omega \to 0$: comportement capacitif.
- Le déphasage tend vers $-\frac{\pi}{2}$ lorsque $\omega \to \infty$: comportement inductif.
- Le déphasage est nul pour $x = 1$, soit pour $\omega = \omega_0$: comportement résistif.

3. Influence du facteur de qualité

On trace $\frac{I}{I_{max}}(x) et\ \varphi(x)$ pour des valeurs de Q différentes.





Plus le facteur de qualité est grand, la résonance est aigue (pic étroit).

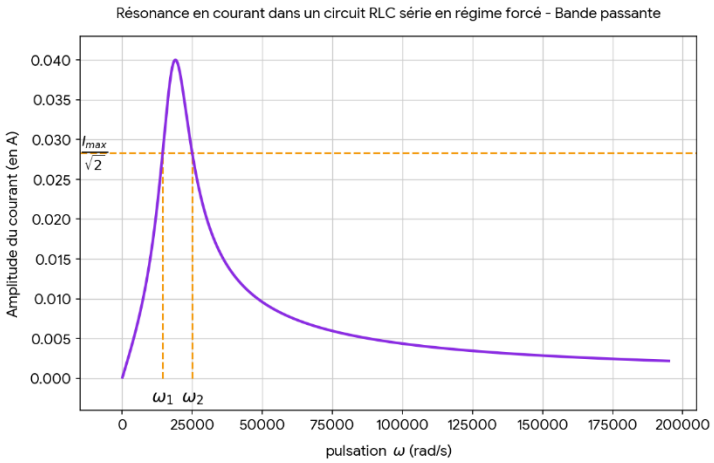
On s'intéresse au domaine de fréquence dans lequel l'amplitude de l'intensité reste importante, c'est-à-dire proche de son maximum $I_{max} = \frac{E}{R}$

Le critère usuellement retenu pour quantifier une **bande passante** est de considérer la **zone de fréquences pour laquelle l'amplitude reste supérieure à l'amplitude maximale :** $\boldsymbol{I(\omega) \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$.
Les pulsations $\omega_{1,2}$ limitant la bande passante pour la résonance en intensité sont telles que :

$$\boldsymbol{I(\omega_{1,2}) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

La bande passante est : $\boldsymbol{\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|}$

On choisit $E = 4\,V, R = 100\,\Omega, L = 9{,}0\,mH$ et $C = 0{,}30\,\mu F$.



On appelle acuité de résonance le rapport $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

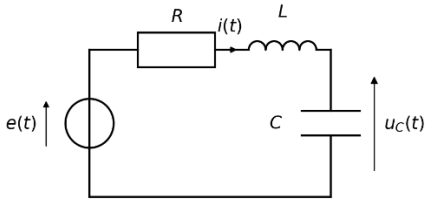
Le facteur de qualité est égal à l'acuité de résonance :

$$\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

☞ *Voir démo en TD.*

V. Résonance aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série

On étudie la tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série.



1. Expression de la tension

On détermine la tension complexe à l'aide d'un pont diviseur de tension

1.1 Tension complexe

$$\underline{u_C} = \frac{\underline{e}\ \frac{1}{jC\omega}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\underline{e}}{jRC\omega + (1 - LC\omega^2)} = \frac{\underline{e}}{(1 - x^2) + j\frac{x}{Q}}$$

1.2 Amplitude

$$U_{cm} = \left|\underline{u_c}\right| = \frac{E}{\sqrt{\left(\left(\frac{x}{Q}\right)^2 + (1 - x^2)^2\right)}}$$

L'amplitude tend vers E lorsque $\omega \to 0$ et vers 0 quand $\omega \to +\infty$.

1.3 Déphasage par rapport à la tension d'entrée

$$\varphi_u = arg(\underline{u_C}) - arg(\underline{e}) = -arg\left((1 - x^2) + j\frac{x}{Q}\right)$$

La partie imaginaire est positive alors que la partie réelle peut être positive ou négative selon la fréquence : $\varphi_u \in [-\pi, \pi]$

✓ Soit on distingue 2 cas :

- pour $\omega \leq \omega_0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \geq 0$: $\varphi_u = -\arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$
- pour $\omega > \omega_0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 0$: $\varphi_u = -\pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$

✓ Soit on trouve une expression générale faisant intervenir un complexe de partie réelle positive :

$$\varphi_u = -arg\left((1 - x^2) + j\frac{x}{Q}\right) = -arg\left(j(-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right) = -\frac{\pi}{2} + arctan\left(\frac{Q(1 - x^2)}{x}\right)$$

- Le déphasage tend vers 0 lorsque $\omega \to 0$.
- Le déphasage tend vers $-\pi$ lorsque $\omega \to \infty$.
- Le déphasage égal à $-\frac{\pi}{2}$, soit pour $\omega = \omega_0$

2. Résonance en tension (ou surtension)

On cherche l'existence d'un extremum pour la fonction $f(x) = \left(\frac{x}{Q}\right)^2 + (1 - x^2)^2$.

$$f'(x) = \frac{2x}{Q^2} + 2(1 - x^2)(-2x) = 2x\left(\frac{1}{Q^2} - 2(1 - x^2)\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ (cas\ d'un\ régime\ continu) ou\ x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette dernière solution existe à condition que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ c'et à dire si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On admet qu'il s'agit d'un minimum et donc que U_{cm} est maximale.

Amplitude U_{cm} maximale pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \leq \omega_0$, la pulsation de résonance est différente de la pulsation propre du circuit et dépend de R.

Condition d'existence : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Remarque : Si $Q >> 1$, $\omega_r \approx \omega_0$.

