



TD 6 – Oscillateurs harmoniques

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

- Modèle du circuit LC : établir l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales.
- Oscillations harmoniques. Pulsation, fréquence et période propres d'oscillations.
- Modèle du circuit RLC : écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.
- Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série.

J'apprends mon cours : Questions de cours, exercices 1, 2, 3, 4 (questions 1 à 3)

Questions de cours

- Q1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par une des grandeurs électriques dans un circuit *LC*.
- Q2.** Établir l'équation différentielle vérifiée par une des grandeurs électriques dans un circuit *RLC*.
- Q3.** À partir de l'expression analytique d'une solution donnée, représenter graphiquement l'évolution temporelle de cette solution, en faisant apparaître la période, l'amplitude et la valeur moyenne, ainsi que leur lien avec l'expression analytique.
- Q4.** Rappeler sans démonstration la forme canonique de l'équation différentielle décrivant le comportement d'un oscillateur harmonique amorti. Expliquer la signification des termes introduits. Que devient-elle en l'absence de phénomène dissipatif ?
- Q5.** Quels sont les 3 types de régimes transitoires que l'on peut observer dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti ? Préciser la valeur de Q dans chaque cas. Dans quel cas le régime transitoire est-il le plus court ?
- Q6.** Comment détermine-t-on l'expression de la pseudo pulsation des oscillations amorties en fonction du facteur de qualité et de la pulsation propre ?
- Q7.** Dans le cas du régime pseudo-périodique, quelle information apporte le facteur de qualité ?
- Q8.** Relier la durée du régime transitoire aux racines du polynôme caractéristique.

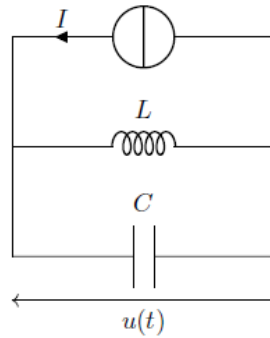
Exercices

Exercice 1 : Circuit LC parallèle ♥

★★★
Ref. 0051

✓ Oscillations harmoniques non amorties

On considère un circuit LC alimenté par une source de courant continue. Initialement, le condensateur n'est pas chargé et la bobine n'est parcourue par aucun courant.



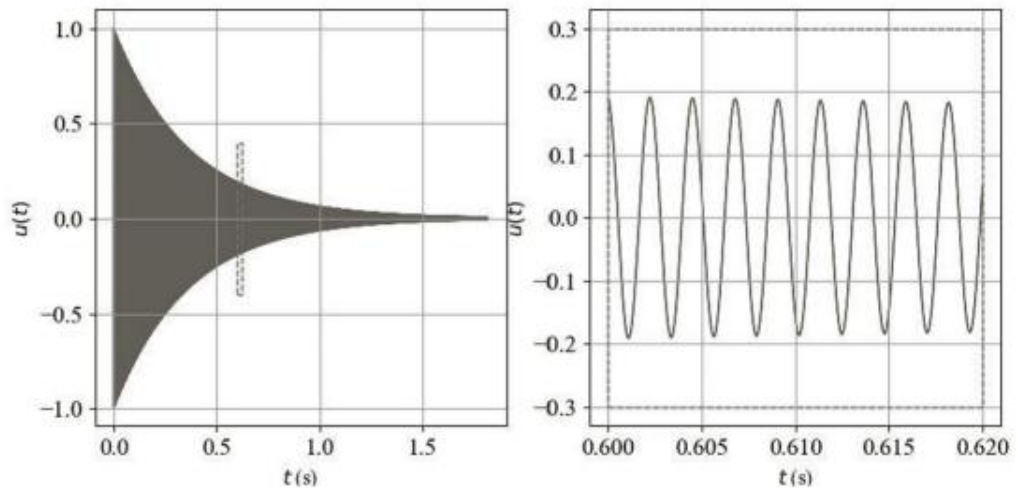
- 1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. Commenter.
- 2) En déduire la pulsation des oscillations.
- 3) Déterminer $u(0)$.
- 4) Déterminer $i_c(0)$. En déduire $\frac{du}{dt}(0)$.
- 5) En déduire la solution $u(t)$ à partir des conditions initiales. La tracer.

Exercice 2 : Diapason

★★★
Ref. 0052

- ✓ Oscillations harmoniques amorties
- ✓ Pseudo-période
- ✓ Facteur de qualité

Un diapason peut être modélisé par un système mécanique masse-ressort amorti. On donne l'enregistrement sonore suivant.



- 1) Nommer le régime transitoire.
- 2) Déterminer graphiquement la pseudo-période T et estimer la durée totale des oscillations.
- 3) Que peut-on supposer concernant le facteur de qualité ?
- 4) En déduire la valeur de la pulsation propre.
- 5) Estimer le facteur de qualité Q .

Exercice 3 : Etude d'un circuit RLC (CCS TSI 2011) ♥

☐ | ★★★
Ref. 0053

- ✓ Oscillateur harmonique amorti
- ✓ Régime pseudo-périodique
- ✓ Circuit RLC
- ✓ Bilan énergétique

On considère le circuit RLC série représenté sur la figure 1. On définit les quantités suivantes : la pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et le facteur de qualité } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

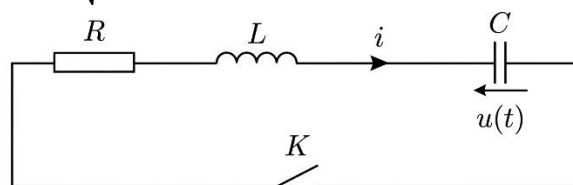


Figure 1 Circuit RLC série

L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0) = u_0$.

- 1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$. On y fera apparaître ω_0 et Q . Préciser les différents régimes d'évolution possibles selon les valeurs de Q . On suppose $Q > 1/2$ dans la suite.
- 2) Définir le temps τ caractéristique d'amortissement et la pseudo-pulsation Ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q .
- 3) Établir l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$, compte tenu des conditions initiales que vous explicitez et justifierez.
- 4) On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$ et d'une capacité $C_0 = 11 \text{ pF}$.
 - a) Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :

$$L(C + C_0) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0 \right) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) u = 0$$

- b) Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

On supposera que ces relations sont vérifiées dans la suite du problème.

- 5) On suppose $Q \gg 1$. Montrer que la décroissance de l'énergie totale sur une période est telle que :

$$\frac{E(t) - E(t + T)}{E(t)} = \frac{2\pi}{Q}$$

On donne : au voisinage de zéro, $\exp(x) \simeq 1 + x$ (DL au 1^{er} ordre)

Exercice 4 : Mise en série d'une bobine et d'un condensateur réel

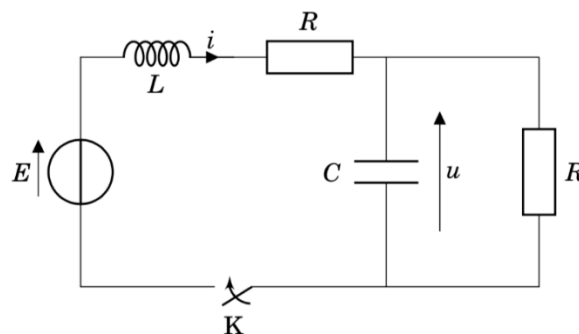
★★★

Ref. 0054

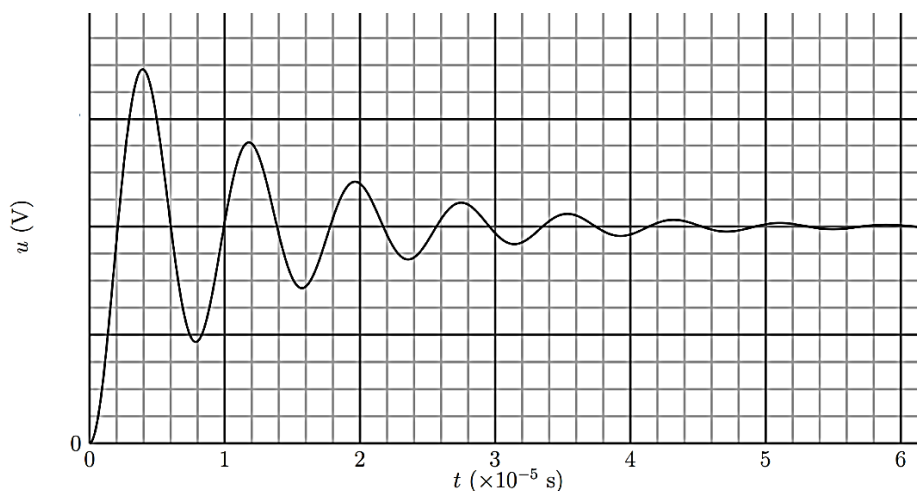
- ✓ Oscillateur harmonique amorti
- ✓ Régime pseudo-périodique
- ✓ Décrément logarithmique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension E produit à l'aide d'un signal créneau d'amplitude E dans le circuit ci-dessous. Le condensateur est initialement déchargé.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



- 1) Déterminer l'expression puis la valeur numérique de la tension u en régime continu établi.
- 2) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. On la mettra sous forme canonique et on donnera l'expression de sa pulsation propre ω_0 , de son facteur de qualité Q .
- 3) On observe sur un oscilloscope la courbe ci-dessous. Conclure quant à la relation vérifiée par L , C et R .
- 4) Exprimer la pseudo-pulsation des oscillations.
- 5) Donner la forme mathématique de $u(t)$ sans déterminer les constantes.
- 6) On définit le décrement logarithmique par : $\delta = \ln\left(\frac{u(t)-u(\infty)}{u(t+T)-u(\infty)}\right)$. Exprimer le facteur de qualité en fonction de δ .
- 7) Calculer le facteur de qualité et en déduire la pulsation propre.



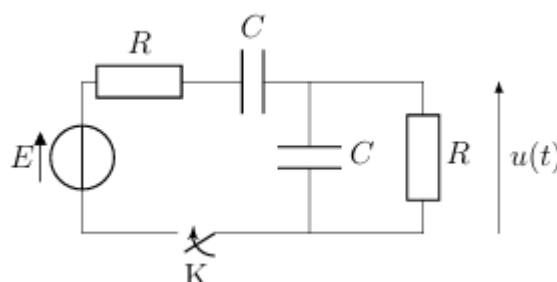
Exercice 5 : Pont de Wien en régime transitoire ♥



Ref. 0056

- ✓ Oscillateur harmonique amorti
- ✓ Régime apériodique

On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien. Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C , sont déchargés. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques.



1) Montrer que $u(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante en précisant l'expression de ω_0 :

$$\ddot{u} + 3\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

2) Déterminer les conditions initiales : $u(0^+)$ et $\frac{du}{dt}(0^+)$.

3) En déduire l'expression de $u(t)$. Représenter graphiquement son allure.

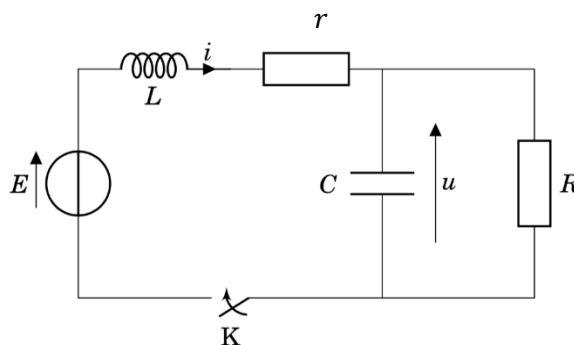
Exercice 6 : Mise en série d'une bobine et d'un condensateur réels (bis)



Ref. 0204

✓ Circuit du 2nd ordre à 2 mailles

On considère le montage ci-dessous modélisant l'association série d'une bobine réelle et d'un condensateur réel. On ferme l'interrupteur à $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé.



On pose $\tau = \frac{L}{r} = RC$

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

2) Résoudre. Son expression pour $t \rightarrow \infty$ est-elle cohérente ?

3) Tracer l'allure de $i(t)$.

4) Pour L et C fixées, on considère la cas $r \rightarrow 0$. Déterminer, à partir de l'expression déjà établie, la nouvelle expression de $i(t)$. Commenter. Ce résultat était-il prévisible ?

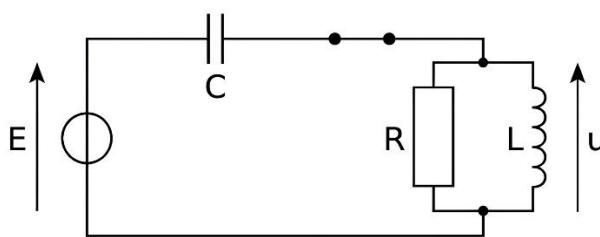
Exercice 7 : Etude d'un circuit à 2 mailles



Ref. 0205

✓ Circuit du 2nd ordre à 2 mailles

On considère le montage ci-dessous. On ferme l'interrupteur à $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé. Avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circule dans le circuit.



On pose $\tau = RC$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

2) Résoudre dans le cas où $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$.