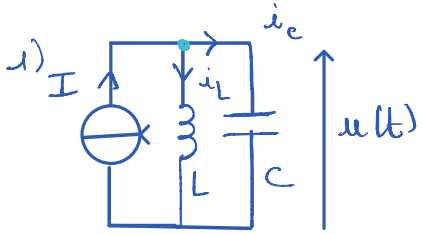
Correction TD6

Exercice 1 :

1) 

(1) $I = i_R + i_L$ (2) $i_c = C\frac{du}{dt}$

(3) $u = L\frac{di_L}{dt}$

On dérive (1) : $\frac{di_c}{dt} + \frac{di_L}{dt} = 0$ $\underbrace{C\ddot{u}}_{(2)} + \underbrace{\frac{u}{L}}_{(3)} = 0$

$\ddot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$

2) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

3) $u(0^-) = u(0^+) = 0 \Rightarrow u(0) = 0$

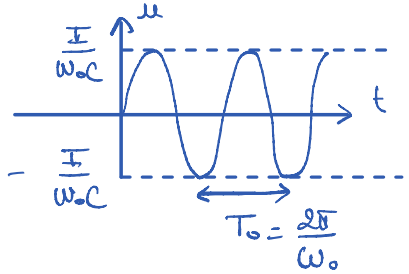
4) $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ $i_c(0) = I - i_L(0) = I$ $\frac{du}{dt}(0) = \frac{I}{C}$

5) $u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$u(0) = A = 0$

$\frac{du}{dt}(0) = B\omega_0 = \frac{I}{C}$ $B = \frac{I}{\omega_0 C}$

$u(t) = \frac{I}{\omega_0 C}\sin(\omega_0 t)$



Exercice 2 :

1) Régime pseudo-périodique (oscillations harmoniques amorties)

2) $T = 2{,}3$ ms durée totale $\simeq 1{,}6$ s

3) durée totale $\gg T \Rightarrow Q$ très grand

4) Si Q est très grand $\Omega \simeq \omega_0$ $\omega_0 \simeq \frac{2\pi}{T} = 2{,}7\times10^3$ rad.s^{-1}

5) Méthode de la tangente à l'origine : $\tau = 0{,}5$ s } difficile d'être précis

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0\tau}{2} = 7\times10^2$

ou Durée totale $\simeq Q \times T$ $Q = 7\times10^2$

Exercice 3 :

1) $u + Ri + u_L = 0$ $i = C\frac{du}{dt}$ $u_L = L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$ en posant $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

on obtient $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

- $\Delta > 0$: $Q < 1/2$ régime apériodique
- $\Delta < 0$: $Q > 1/2$ régime pseudo-périodique
- $\Delta = 0$: $Q = 1/2$ régime apériodique critique

2) $Q > 1/2$: solutions de l'équation caractéristique

$X_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\sqrt{|\Delta|}}{2}$ $X_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\sqrt{|\Delta|}}{2}$

- Partie réelle : $-\frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{1}{\tau}$ $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
- Partie imaginaire : $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} \Rightarrow \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (pseudo-pulsation)

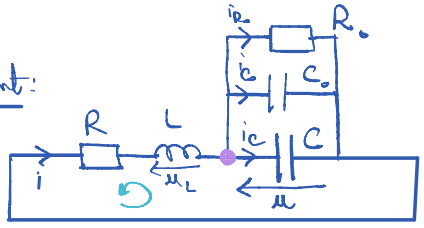
3) $u(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$

- $u(0^-) = u(0^+) = U_0 \quad u(0) = A = U_0$
- $i(0^-) = i(0^+) = 0$ (K ouvert et continuité de i) or $i = C\frac{du}{dt}$

$$\frac{du}{dt}(0) = 0 = -\frac{1}{\tau}A + B\Omega \qquad B = \frac{A}{\Omega\tau} = \frac{U_0}{\Omega\tau}$$

$$u(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

4) Circuit équivalent :



a)

(1) $u + Ri + u_L = 0$ (3) $u_L = L\frac{di}{dt}$ (5) $i_{C_0} = C_0\frac{du}{dt}$

(2) $i = i_C + i_{C_0} + i_{R_0}$ (4) $i_C = C\frac{du}{dt}$ (6) $u = R_0 i_{R_0}$

$$i = (C + C_0)\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0} \qquad \text{donc (3)} \Rightarrow u_L = L(C+C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R_0}\frac{du}{dt}$$

Dans (1) : $u + R(C+C_0)\ddot{u} + \frac{R}{R_0}u + L(C+C_0)\ddot{u} + \frac{L}{R_0}\dot{u} = 0$

$$L(C+C_0)\ddot{u} + \left(R(C+C_0) + \frac{L}{R_0}\right)\dot{u} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$

b) $L(C+C_0) \simeq LC$ si $C_0 \ll C$

C : qq nF en TP $\Rightarrow$ OK

$1 + \frac{R}{R_0} \simeq 1$ si $R_0 \gg R$

R : qq kΩ en TP $\rightarrow$ OK

$R(C+C_0) + \frac{L}{R_0} \simeq RC$ si $C \gg C_0$ et $RC \gg \frac{L}{R_0}$ soit $L \ll RCR_0 = 10^3$ H

(10^3, 10^{-6}, 10^6)

< qq mH en TP OK

< qq cm H

5) $E(t) = E_{elec} + E_{mag} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$

$u(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$ $\qquad \omega_0\tau = 2Q$

hyp : $Q \gg 1$ donc :

$\Omega \simeq \omega_0 \Rightarrow \Omega\tau = \omega_0\tau \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} \ll \omega_0$

$u(t) \simeq U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(\omega_0 t)$ ← on ne garde que le 1er terme de $u(t)$

$E_e(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2 \Rightarrow E_e(t) \simeq \frac{1}{2}CU_0^2\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\cos^2(\omega_0 t)$

$i(t) = C\frac{du}{dt} = CU_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\omega_0\sin(\omega_0 t) - \underbrace{\frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t)}_{\text{négligeable}}\right)$

$i(t) \simeq -CU_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$E_{mag}(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2 \Rightarrow E_{mag}(t) = \frac{1}{2}LC^2U_0^2\underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\sin^2(\omega_0 t)$

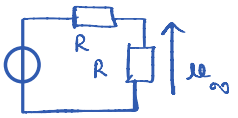
$$E_{mag}(t) = \frac{1}{2}CU_0^2\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\sin^2(\omega_0 t)$$

Energie totale : $E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}CU_0^2}_{\text{énergie initiale}}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$

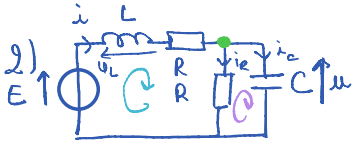
$$\frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} \simeq \frac{\exp(-2t/\tau) - \exp(-2(t+T)/\tau)}{\exp(-2t/\tau)} = 1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right) \underset{\text{DL au 1er ordre}}{\simeq} \frac{2T}{\tau} \simeq \frac{\omega_0 T}{Q} \simeq 2\pi \quad \left(\frac{2Q}{\omega_0}\right)$$

$$\frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

Exercice 4 :

1) Circuit équivalent : 

le 2R sont en série $\Rightarrow u_\infty = \frac{E}{2}$

2) 

(1) $E = u_L + R\,i + u$ (3) $i = i_R + i_C$

(2) $u = R\,i_R$ (4) $u_L = L\frac{di}{dt}$

(5) $i_C = C\frac{du}{dt}$

(3), (1) et (4) : $E = L\left(\frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt}\right) + R\,(i_R + i_C) + u$

($i_R = \frac{u}{R}$)

$E = \frac{L}{R}\dot{u} + LC\ddot{u} + u + RC\dot{u} + u$

$\ddot{u} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\dot{u} + \frac{2}{LC}u = \frac{E}{LC}$ Rq : on retrouve bien $u_\infty = \frac{E}{2}$

On identifie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ et $Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}} = \frac{\omega_0 R C L}{L + R^2 C}$

$Q = \frac{R\sqrt{2LC}}{L + R^2 C}$

3) Le régime est pseudo-périodique donc $Q > 1/2$.

$Q = \frac{R\sqrt{2LC}}{L + R^2 C} > \frac{1}{2} \iff 2R\sqrt{2LC} > L + R^2 C$

4) solutions de l'équation caractéristique : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

$X_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ ($\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$)

$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

5) $u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + \frac{E}{2}$

6) $\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+T) - u_\infty} = \frac{\exp\left(-\omega_0 t/2Q\right)}{\exp\left(-\frac{\omega_0(t+T)}{2Q}\right)}$ les parties imaginaires étant égales à t et $t+T$

$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$

or $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{\left(Q^2 - 1/4\right)^{1/2}}$

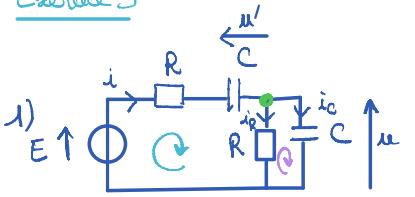
$Q^2 = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}}$

7) • $\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+T) - u_\infty} = 2$ (graphiquement, en considérant les 2 premiers maximas)

$\delta = \ln 2 \Rightarrow Q = 4{,}6$

• $T = 0{,}8 \times 10^{-5}\,s$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\left(1 - 1/4Q^2\right)^{-1/2} \Rightarrow \omega_0 = 7{,}9 \times 10^5\ rad.s^{-1}$

Exercice 5

1) 

(1) $E = R\,i + u' + u$ (4) $i = C\frac{du'}{dt}$

(2) $u = R\,i_R$ (5) $i_C = C\frac{du}{dt}$

(3) $i = i_R + i_C$

(5), (2) dans (1) : $E = R\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) + u' + u$

il faut remplacer u'

$\frac{du'}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{1}{C}\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right)$

On dérive l'équation obtenue :

$0 = \frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) + \frac{du}{dt}$

Forme canonique : $\ddot{u} + \frac{3}{RC}\dot{u} + \frac{2}{(RC)^2}u = 0$ on peut poser $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Rq : l'EDL demandée est sans 2nd membre → cela peut donner l'idée de dériver (1)
→ en régime permanent $u_\infty = 0$

2) $u(0^-) = u(0^+) = 0$ $\quad u'(0) = u'(0^+) = 0$

(5) : $\frac{du}{dt}(0) = \frac{i_c}{C}(0) = \frac{i(0) - i_R(0)}{C}$

(1) $E = Ri(0) + u(0) + u'(0)$ ($u(0) = 0$, $u'(0) = 0$)

$i(0) = \frac{E}{R}$

(2) $i_R(0) = \frac{u(0)}{R} = 0$

$\Rightarrow \frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{RC}$

3) $\frac{\omega_0}{Q} = 3\omega_0 \Rightarrow Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ → régime apériodique

Solutions de l'équation caractéristique : $X_{1,2} = \frac{-3\omega_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

où $\Delta = (3\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2$

$X_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$

$u(t) = A\exp(X_1 t) + B\exp(X_2 t)$

$u(0) = 0 \iff A + B = 0 \quad A = -B$

$u(t) = A\left(\exp(X_1 t) - \exp(X_2 t)\right)$

$\frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{RC} \iff A(X_1 - X_2) = \frac{E}{RC}$

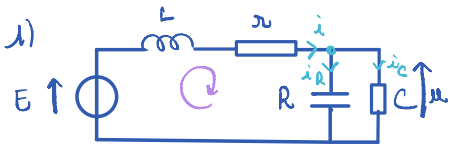
$X_1 - X_2 = \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}\omega_0$

$A = \frac{E}{\sqrt{5} RC\omega_0} = \frac{E}{\sqrt{5}}$

$u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right) - \exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)\right)$

Exercice 6 :

1)



(1) loi des mailles : $E = L\frac{di}{dt} + ri + u$

(2) loi d'Ohm : $u = Ri_R$

(3) loi des nœuds $i = i_R + i_C$

(4) condensateur : $i_C = C\frac{du}{dt}$

→ $E = L\frac{di}{dt} + ri + R(i - i_C) = L\frac{di}{dt} + (R+r)i - RC\frac{du}{dt}$?

On dérive (1) $L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} = 0 \to \frac{du}{dt} = -L\frac{d^2i}{dt^2} - r\frac{di}{dt}$

$L\frac{di}{dt} + (R+r)i + RLC\frac{d^2i}{dt^2} + rRC\frac{di}{dt} = E$

$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{1}{RC}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{RLC}i = \frac{E}{RLC}$

$\frac{2}{\tau}$ $\qquad \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{1}{\tau^2}$

$\tau = \frac{L}{r} = RC$

$L\tau^2 = \frac{RLC}{r}$

2) $\Delta = \frac{4}{\tau^2} - 4\left(1 + \frac{R}{r}\right)\frac{1}{\tau^2} = -\frac{4R}{r\tau^2} < 0$ → régime pseudo-périodique

$X_{1,2} = \frac{-2/\tau \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2}$ $\qquad \Omega = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{R}{r}}$

$i(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + \frac{E}{R+r}$ (solution particulière et i_∞)

CI : • continuité de i imposée par la bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$

• $\frac{di}{dt} = \frac{E - u - ri}{L}$ continuité de u imposée par le condensateur :

$u(0^+) = u(0^-) = 0$

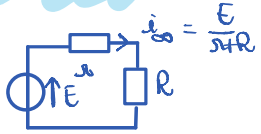
$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$

$i(0)=0 \iff A+\frac{E}{R+r}=0 \Rightarrow A=-\frac{E}{R+r}$

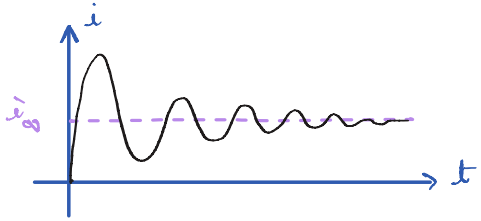
$\frac{di}{dt}(0)=\frac{E}{L} \iff -\frac{A}{\tau}+B\Omega=\frac{E}{L} \Rightarrow B=\frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{(r+R)\tau}\right)=\frac{E}{\Omega\tau}\frac{R}{r(r+R)}$

$$i(t)=\frac{E}{R+r}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(-\cos(\Omega t)+\sqrt{\frac{R}{r}}\sin(\Omega t)\right)+1\right)$$

$i_\infty=\frac{E}{R+r}$ circuit équivalent en régime permanent cohérent



3)



4) si $r \to 0$ $R=\frac{L}{rC} \to \infty$: on se ramène au cas d'une bobine et d'un condensateur idéaux. On s'attend à trouver 1 OHNA (avec $i_\infty=0$ et $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$r \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty \Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \to 1$

$\frac{E}{R+r} \to \frac{E}{R}$

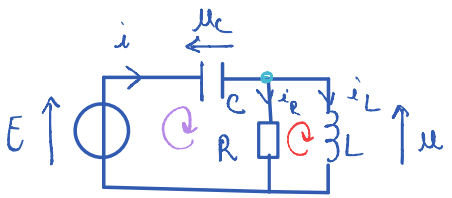
$\frac{R}{r}$ très grand le terme en sinus l'emporte sur celui en cosinus et 1.

$$i(t)=E\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

$\frac{R}{r}=\frac{\tau^2}{LC} \to \sqrt{\frac{R}{r}}\times\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\sqrt{\frac{R}{r}}=\frac{RC}{\sqrt{LC}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$

Exercice 7 :



1) (1) loi des mailles $E=u_c+u$

(2) loi des nœuds $i=i_R+i_L$

(3) condensateur $i=C\frac{du_c}{dt}$

(4) bobine $u_L=L\frac{di_L}{dt}$

(5) loi des mailles loi d'ohm $u=Ri_R$

$i_C=\frac{i_R+i_L}{C}=\frac{u/R+i_L}{C}$

On dérive (1) $\frac{du}{dt}+\frac{du_c}{dt}=0$

$\hookrightarrow \frac{du}{dt}+\frac{u}{RC}+\frac{i_L}{C}=0$

On redérive : $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{du}{dt}+\frac{1}{C}\frac{di_L}{dt}=0$ avec $\frac{di_L}{dt}=u/L$

$\to \ddot{u}+\frac{1}{RC}\dot{u}+\frac{1}{LC}u=0$ $\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC}$ $\quad \frac{1}{RC}=\frac{1}{\tau}$

2) $\Delta=\frac{1}{\tau^2}-4\omega_0^2$ $\quad \omega_0>1/2\tau \Rightarrow \Delta<0$

régime pseudo-périodique

$$X_{1,2} = \frac{-1/\tau \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4\omega_0^2 - 1/\tau^2}$

Ω pseudo pulsation

$$u(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

CI : $u_c(0) = 0$ (continuité de u_c aux bornes de C)

$i_L(0) = 0$ (" " i_L traversant la bobine)

- loi des mailles à $t=0$ $\Rightarrow u(0) = E \Rightarrow \underline{A = E}$
- $$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} - \frac{i_L}{C} = -\frac{E}{RC} \text{ à } t=0$$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{2\tau}A + B\Omega = -\frac{E}{RC} = -\frac{E}{\tau} \qquad B\Omega = -\frac{E}{2\tau} \rightarrow \underline{B = -\frac{E}{2\Omega\tau}}$$

$$u(t) = E\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{2\tau\Omega}\sin(\Omega t)\right)$$