L12 - Applications et relations

Plan

Préambule : certaines notions ont déjà été abordées dans la leçon "L03 - Fonctions de la variable réelle. Généralités", partie I. Généralités sur les fonctions. On a traité le cas particulier d'applications de I (partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Cette leçon se place dans un cadre plus général, E, F désignant des **ensembles quelconques non vides**. On ne travaille pas forcément avec des intervalles.

I. Applications

1. Définitions

Def. 1 Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application, ou fonction, de** E **vers** F tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$ où Γ est une partie de $E \times F$ (graphe) vérifiant la condition :

pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$

Soit : $\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma$

On a donc : tout élément x de E est en relation avec un **unique élément** y de F.
On peut aussi écrire : $\forall (x, y, y') \in E \times F \times F$, $\left\{\begin{array}{l} x\,f\,y \\ x\,f\,y' \end{array}\right. \implies y = y'$

Conséquence : on note alors $y = f(x)$ plutôt que $x\,f\,y$.

Vocabulaire : dans ces conditions
- E est appelé **ensemble de départ** ou **ensemble de définition** de f.
- F est l'**ensemble d'arrivée** de f.
- Pour $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $y = f(x)$ s'appelle **l'image de** x **par** f.
- Si $y = f(x)$ on dit que x est **un antécédent de** y (par f).
- Γ, graphe de f, est égal à l'ensemble $\{(x, f(x)) \,/\, x \in E\}$.
- On note $E \xrightarrow{f} F$ ou $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Def. 2 On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E, **l'ensemble des applications** de E dans F.

Def. 3 Etant donné un ensemble E non vide, on appelle **identité de** E, et on note Id_E ou id_E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

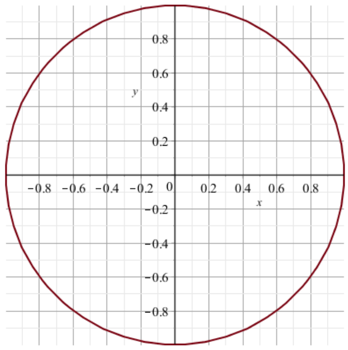
Exemple 1 Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on peut définir l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array}$.

Exemple 2 Si $E = F = \mathbb{R}$, on peut convenir de représenter $E \times F = \mathbb{R}^2$ par le plan usuel rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'application affine $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ a pour graphe une droite d'équation cartésienne $y = ax+b$.
  Réciproquement toute droite D non parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ est le graphe d'une application affine.

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est une application mais écrire $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ ne définit pas une application.

- L'ensemble $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ne peut pas être le graphe d'une application.
  En particulier l'image de $x \in]-1,1[$ n'est pas correctement définie.



Remarque : **égalité d'applications**
$f = (E_1, F_1, G_1)$ et $g = (E_2, F_2, G_2)$ sont deux applications égales si et seulement si :

1) $E_1 = E_2$: égalité des ensembles de départ,

2) $F_1 = F_2$: égalité des ensembles d'arrivée,

3) $G_1 = G_2$: soit $\forall x \in E_1,\ f(x) = g(x)$.

Ne pas oublier de vérifier 1) et 2).

Def. 4 Soit f une application de E dans F, soit A une partie non vide de E.

On appelle **restriction de** f **à** A, et on note $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par :

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$$

Def. 5 Soit f une application de E dans F, E' un ensemble contenant E, c'est-à-dire $E \subset E'$.

On appelle **prolongement de f à E'**, toute application g de E' dans F telle que $g_{|E} = f$, soit :

$$\forall x \in E,\, g(x) = f(x).$$

2. Famille d'éléments

Def. 6 Soit I un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée **famille d'éléments de E** indexée par I.

Notations : au lieu de noter $x : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x(i) \end{array}$ on note $(x_i)_{i\in I}$.

L'ensemble de départ I de la famille est appelé **ensemble des indices** de la famille.

Exemple 3 : $I = \mathbb{N}$, on a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est la notion de suite.

Def. 7 On appelle **sous-famille** d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, toute famille $(x_j)_{j\in J}$ où $J \subset I$.

Rq : c'est en fait une restriction.

Exemple 4 : à partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on définit les suites extraites $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ (indices pairs) et $(x_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ (indices impairs).

Vocabulaire : **Famille finie**

$(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie si et seulement si l'ensemble I est un ensemble fini.

Si $I = \{1, 2, \cdots, p\}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est aussi notée $(x_i)_{1\leq i\leq p}$. On la confond avec le $p-$uplet ordonné $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$.

Famille de parties

Def. 8 Soient E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On définit :

- La **réunion de la famille** $(A_i)_{i\in I}$, notée $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ par

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

- L'**intersection de la famille** $(A_i)_{i\in I}$, notée $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ par

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in I,\, x \in A_i\}$$

Remarque : si $I = \emptyset$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$ et $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = E$.

Def. 9 On note E^I l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexées par I.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. I_1 et I_2 sont deux parties de I : $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$.
On a :

- $\left(\bigcup\limits_{i\in I_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i\in I_2} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I_1\cup I_2} A_i$
- $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$
- $\left(\bigcap\limits_{i\in I_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i\in I_2} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I_1\cup I_2} A_i$
- $\left(\bigcup\limits_{i\in I_1} A_i\right) \cap \left(\bigcup\limits_{j\in I_2} A_j\right) = \bigcup\limits_{(i,j)\in I_1\times I_2} (A_i \cap A_j)$
- $\left(\bigcap\limits_{i\in I_1} A_i\right) \cup \left(\bigcap\limits_{j\in I_2} A_j\right) = \bigcap\limits_{(i,j)\in I_1\times I_2} (A_i \cup A_j)$

3. Composition des applications

Prop. 1 Soient E, F, G trois ensembles non vides.
Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$ de E dans G, est appelée **composée des applications** g **et** f. On la note $g \circ f$.

Démo. 1

Prop. 2 **Associativité de la composition des applications**
Soient E, F, G, H quatre ensembles non vides.
Pour toutes applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Démo. 2

Exemple 5 : Itérées d'une fonction
Soient E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application.
On note : $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ f^n = f \circ f^{n-1}}$.

Remarque : Soit $f : E \longrightarrow F$. On a $\boxed{\begin{array}{l} f \circ \mathrm{Id}_E = f \\ \mathrm{Id}_F \circ f = f \end{array}}$

Attention : en général $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux applications distinctes.

Exemple 6

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.
  Alors : $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$

4. Applications et ensembles

Def. 10 Soient E, F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Soit $\boxed{A \subset E}$. On appelle **image directe de A par f**, ou image de A par f, l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\} = \{y \in F \,/\, \exists x \in A,\, y = f(x)\}$$

- Soit $\boxed{B \subset F}$. On appelle **image réciproque de B par f**, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$$

$f(A)$ est l'ensemble des images des éléments x de A.
$f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments x de E ayant leur image dans B.

Attention : l'écriture $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f est bijective, et ne fait pas référence à une fonction réciproque f^{-1}.

Exemple 7 - $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$. Cette fonction n'est PAS bijective, donc la fonction réciproque f^{-1} n'existe pas.
Cependant on peut écrire $f^{-1}\big(\{0\}\big) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}\big(\{1\}\big) = \emptyset$.

Exemple 8 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, déterminer :

- $f([-2, 2])$ et $f([-1, 2])$
- $f^{-1}([0, 4])$, $f^{-1}([-2, 4])$ et $f^{-1}([-2, -1])$.

Exercice 1 Soient $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset E$, $A' \subset F$, $B' \subset F$. Démontrer :

- $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
- $f^{-1}\big(\overline{A'}\big) = \overline{f^{-1}(A')}$

5. Injection, surjection, bijection

Def. 11 Une application $f : E \longrightarrow F$ est :

- **une injection**, ou **injective**, si et seulement si :

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$$

i.e. tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E, ou deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f.

- **une surjection**, ou **surjective** si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

i.e. tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.

- **une bijection**, ou **bijective**, si et seulement si f est injective et surjective, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

i.e. tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E.

Prop. 3 La composée de deux injections (resp. surjections, resp. bijections) est une injection (resp. surjection, resp. bijection).

Démo. 3 - A CONNAITRE.

Prop. 4 Soient $f : E \longrightarrow F$, et $g : F \longrightarrow G$.

1) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démo. 4 - A CONNAITRE.

Def. 12 **Application réciproque d'une bijection**
Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection.
Soit $y \in F$, il existe un unique élément x de E tel que $f(x) = y$.

On définit $f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = x \text{ où } x \text{ vérifie } y = f(x) \end{array}$

f^{-1} est une application de F dans E, appelée **application réciproque de** f.

Prop. 5 $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad$ et $\quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$

Démo. 5

Exemple 9 - $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ est bijective (cf Fonction strictement monotone et continue).

La bijection réciproque de f est la fonction $\sqrt[3]{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{1/3} \end{array}$.

Prop. 6 Si f est une bijection alors f^{-1} est une bijection

Démo. 6

Prop. 7 **Savoir identifier une bijection**
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est une bijection si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\begin{cases} f \circ g = \mathrm{Id}_F \\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $\boxed{f^{-1} = g}$.

Démo. 7

Remarque : si f est bijective, on sait que f^{-1} est bijective, on identifie $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exercice 2 CLASSIQUE
Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 3 CLASSIQUE - Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Montrer :

1) Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

2) Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Prop. 8 **Réciproque de la composée de deux bijections**
Soient $f : E \longrightarrow F$, et $g : F \longrightarrow G$.

Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démo. 8

Dans le cas où $f \in F^E$ est bijective, soit $B \in \mathcal{P}(F)$, l'écriture $f^{-1}(B)$ désigne simultanément l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par l'application réciproque f^{-1}.

Prop. 9 Soit $f \in F^E$ est bijective et $B \in \mathcal{P}(F)$.
L'image directe de B par f^{-1} et l'image réciproque de B par f sont égales.

Démo. 9

6. Fonction indicatrice

Def. 13 Soit $A \subset E$. La fonction **indicatrice de** A, ou **fonction caractéristique de** A, est la fonction de E dans $\{0,1\}$ notée $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array}$$

Prop. 10 Soient $A \subset E$, $B \subset E$. On a :

1) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

2) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

3) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

Démo. 10

Remarque :

Si E a un nombre fini d'éléments, on a : $\displaystyle\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = \text{card(A)} = \text{nombre d'éléments de } A$

.

Prop. 11 L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est une bijection.

Démo. 11

Egalité de deux ensembles

Pour montrer l'égalité de deux parties A et B de E, on peut prouver l'égalité de leurs fonctions indicatrices.

$$A = B \Longleftrightarrow \Big(A \subset B \text{ et } B \subset A\Big) \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$$

II. Relations binaires

1. Généralités

Def. 14 Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est une partie de $E \times E$. On dit que deux éléments x et y de E sont en relation, et l'on note $x \,\mathcal{R}\, y$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Exemple 10

- La relation définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x \leq y$ correspond au demi-plan situé au dessus de la première bissectrice.
- La relation définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ correspond à la réunion des deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

Def. 15 Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite :

- **réflexive** si : $\forall x \in E$, $x \,\mathcal{R}\, x$
- **symétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2$, $x \,\mathcal{R}\, y \implies y \,\mathcal{R}\, x$
- **antisymétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2$, $\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, x \end{cases} \implies x = y$
- **transitive** si : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \implies x \,\mathcal{R}\, z$

Remarque : seule la relation $=$ est simultanément réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

Exemple 11 La relation $\perp$ pour les droites du plan est symétrique. Elle n'est pas réflexive, pas antisymétrique et pas transitive.

Exemple 12 La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est uniquement transitive. Elle n'est pas réflexive, pas symétrique, pas antisymétrique.

2. Relation d'équivalence

Def. 16 Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ donné. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ p \,\mathcal{R}\, q \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ p - q = kn.$$

$\mathcal{R}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ appelée **congruence modulo** n.

Def. 17 Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- Pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de** x **pour** $\mathcal{R}$, et on note $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$ l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \,/\, x \,\mathcal{R}\, y\}$$

- Une partie X de E est une **classe d'équivalence** s'il existe $x \in E$ tel que $X = \mathrm{cl}(x)$, x est alors appelé **un représentant de** X.

Remarques :

- $\forall x \in E$, $x \in \overline{x}$.
- $\forall (x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}(x)$.

Exemple 14 **- Congruence modulo** 2 **sur** $\mathbb{Z}$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ p - q = 2k.$$

Il y a deux classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$:

- $\mathrm{cl}(0) = \{2p \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$, ensemble des entiers relatifs pairs ;
- $\mathrm{cl}(1) = \{2p \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$, ensemble des entiers relatifs impairs.

Exemple 15 - Congruence modulo 5 sur $\mathbb{Z}$:

$$p\,\mathcal{R}\,q \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, p-q=5k.$$

Il y a 5 classes d'équivalences : $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ et $\overline{4}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{Z},\, \overline{n} = \{n+5k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles non vides, $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

- Montrer que $\mathcal{R}$ définie sur E par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow f(x)=f(y)$$

  est une relation d'équivalence sur E.

- Montrer que : $\forall x \in E,\, \overline{x} = f^{-1}\big(\{f(x)\}\big)$.

Prop. 12

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, soient x et y dans E, alors :

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff y \in \mathrm{cl}(x) \iff \mathrm{cl}(x)=\mathrm{cl}(y)$$

Démo. 12

Def. 18

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{U}$ est une **partition de** E si et seulement si :

$$\begin{cases} 1) \quad \forall A \in \mathcal{U},\, A \neq \emptyset \\ 2) \quad \forall A, B \in \mathcal{U},\, A \neq B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset \\ 3) \quad \bigcup\limits_{A \in \mathcal{U}} A = E \end{cases}$$

Exemple 16 :

- L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.

- $E = \{1,2,3,4,5\}$
  $\mathcal{U} = \{\{1\},\{2,4\},\{3,5\}\}$ est une partition de E.

Prop. 13

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ forme une partition de E.

Démo. 13

Exercice 5

Soit $\mathcal{U}$ une partition de E. On définit $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x \in E,\, \forall y \in E, \quad x\,\mathcal{R}\,y \iff (\exists A \in \mathcal{U},\, x \in A \,\mathrm{et}\, y \in A)$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E dont les classes sont les éléments de $\mathcal{U}$.

Exemple 17 $E=$ ensemble des droites du plan.
Sur E on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par : $D_1 \, \mathcal{R} \, D_2 \iff D_1 \, // \, D_2$.
La relation de parallélisme entre deux droites est une relation d'équivalence.
Pour $D \in E$, $\mathrm{cl}(D)=$ ensemble des droites parallèles à D.
On appelle aussi cet ensemble "**la direction de la droite** D".

Exemple 18 $\mathbb{C}$ muni de la relation : $z \, \mathcal{R} \, z' \iff |z| = |z'|$.
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
Dans le plan complexe, les classes d'équivalence sont les cercles concentriques centrés sur l'origine.

Exemple 19 $\mathcal{P}$ désignant le plan usuel, $E = \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. On définit une relation d'équivalence sur E notée $\sim$ par $(A, B) \sim (C, D)$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
Les classes d'équivalence sont appelées vecteurs du plan.

3. Relation d'ordre

Def. 19 On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre sur E si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Le couple $(E, \mathcal{R})$ est alors appelé **ensemble ordonné**.

Exemple 20

- Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ les relations usuelles $\leq$ ou $\geq$ sont des relations d'ordre.
- Sur $\mathcal{P}(E)$, l'inclusion est une relation d'ordre.
- La relation de divisibilité notée $|$ sur $\mathbb{N}$, définie par : $x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \, y = kx$, est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Attention : la relation $<$ utilisée sur les ensembles de nombres usuels, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, n'est pas une relation d'ordre. Elles est antisymétrique et transitive mais elle n'est pas réflexive.

Def. 20 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que deux éléments x et y de E sont comparables si l'on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemple 21 Dans $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel, deux réels quelconques sont toujours comparables.
Dans $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité, les éléments 2 et 3 ne sont pas comparables.

Def. 21 La relation d'ordre, notée $\leq$, définit un **ordre total** sur E si deux éléments quelconques de E sont comparables :

$$\forall (x, y) \in E^2 \, (x \leq y \, ou \, y \leq x).$$

Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est **partiel**.

Def. 22 Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ et $a \in A$.
On dit que a est le **plus grand élément** de A si $\forall x \in A, \, x \leq a$.

Un tel élément est forcément unique par antisymétrie de $\leq$.
On définit de façon analogue le plus petit élément de A si il existe.