Fonctions trigonométriques : compléments

Plan

Compléments et documents annexes :

1) Polycopié de démonstrations

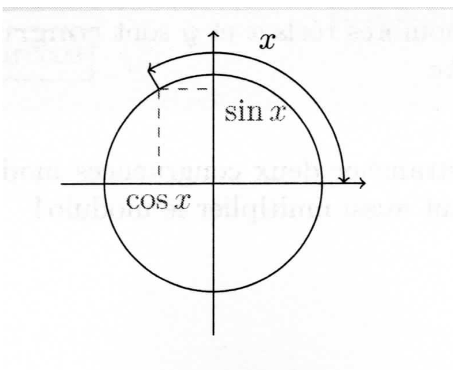
2) Fiche de Travaux Dirigés

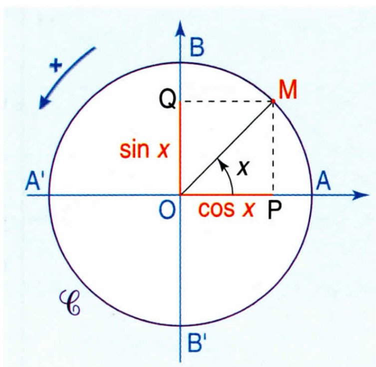
I. Fonctions cosinus et sinus

1. Paramétrisation du cercle trigonométrique

On donne une **définition géométrique** des fonctions cosinus et sinus.

Def. 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Sur le cercle de centre O et de rayon 1, on tend, à partir du point de coordonnées (1,0), une corde de longueur x, dans le sens direct si $x > 0$, indirect sinon.
On note alors $(\cos x, \sin x)$ ou $(\cos(x), \sin(x))$ les coordonnées du point obtenu.
On appelle π la longueur du demi-cercle reliant les points de coordonnées (1,0) et $(-1, 0)$, **cosinus** la fonction $x \longmapsto \cos x$ et **sinus** la fonction $x \longmapsto \sin x$.





La définition géométrique des fonctions cosinus et sinus a pour conséquence :

- cosinus et sinus sont 2π-périodiques :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

Conséquence : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$

- cosinus est paire : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x).}$

- sinus est impaire : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x).}$

Prop. 1 **Propriétés calculatoires**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ (fonctions bornées)

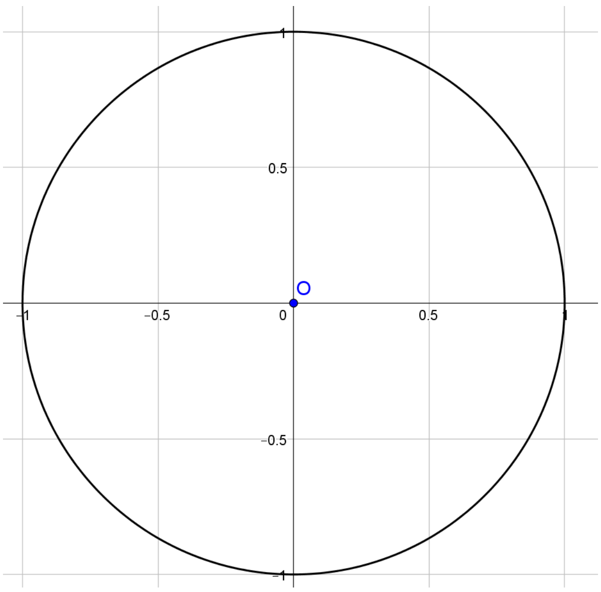
Démo. 1

2. Cosinus et sinus des angles usuels

• La valeur de **cosinus** s'obtient par projection sur l'axe des **abscisses**.
On a la valeur remarquable : $\boxed{\cos(0) = 1}$.

• La valeur de **sinus** s'obtient par projection sur l'axe des **ordonnées**.
On a la valeur remarquable : $\boxed{\sin(0) = 0}$.

Sur la figure ci-dessous faire apparaître les angles remarquables $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$, en s'aidant des conversions radians/degrés : π radians $=$ 180 degrés.



• Les points $M\big(\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4})\big)$ et $M'\big(\cos(\frac{3\pi}{4}), \sin(\frac{3\pi}{4})\big)$, sont situés respectivement sur les bissectrices d'équation $y = x$ et $y = -x$.
En utilisant la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, retrouver les valeurs des cosinus et sinus correspondants.

• Le point $A\big(\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})\big)$ a "visuellement" une valeur de cosinus remarquable, laquelle ? En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{3})$.

• Le point $B\big(\cos(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{6})\big)$ a "visuellement" une valeur de sinus remarquable, laquelle ? En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{6})$.

• De façon similaire, déterminer les valeurs de $\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{3\pi}{4})$, $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\sin(\frac{2\pi}{3})$, $\cos(\frac{5\pi}{6})$ et $\sin(\frac{5\pi}{6})$.

Conclusion : compléter et retenir !

$\cos(0) =$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) =$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) =$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$
$\sin(0) =$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) =$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) =$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) =$	$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) =$	$\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) =$	$\cos(\pi) =$
$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) =$	$\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) =$	$\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) =$	$\sin(\pi) =$

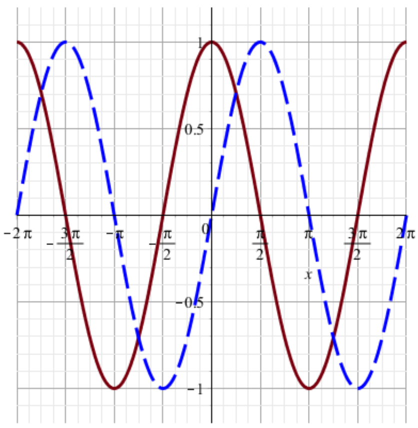
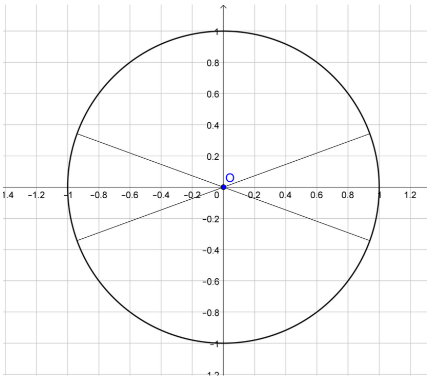
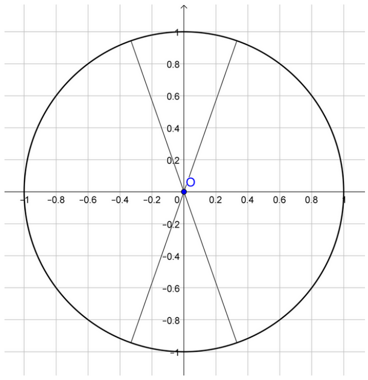


FIGURE 1 – En rouge $y = \cos(x)$ - en bleu $y = \sin(x)$

3. Relations dans le cercle trigonométrique

Prop. 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \bullet \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \bullet \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \bullet \cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\ \bullet \cos(\dfrac{\pi}{2} + x) = -\sin(x) \end{cases} , \quad \begin{cases} \bullet \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \bullet \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \bullet \sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \\ \bullet \sin(\dfrac{\pi}{2} + x) = \cos(x) \end{cases}$$

Démo. 2

4. Formules usuelles de trigonométrie

Formules d'addition et de duplication

Prop. 3

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Démo. 3

Conséquence : **transformation de sommes en produits**.

Prop. 4

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\,\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\,\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\,\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\,\sin\dfrac{p-q}{2}$

Démo. 4

Formule usuelle fondamentale : $\boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x}$.

S'utilise pour le calcul intégral sous la forme $\boxed{\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \text{ et } \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$

Exemple 1 : Montrer que pour tout réel x : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$.

5. Etude des fonctions cosinus et sinus

Limites usuelles

Prop. 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Démo. 5 - Méthode 1 : en utilisant les taux d'accroissements, avec les fonctions dérivées !

Méthode 2 : démonstration géométrique de la première limite.

Prop. 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Démo. 6

Prop. 7 cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos' x = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin' x = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Démo. 7

Remarque : ajouter $\dfrac{\pi}{2}$ c'est dériver la fonction.

Conséquence : on étudie les fonctions sur $[0, \pi]$, puis on complète le tracé de la courbe représentative par symétrie et périodicité.

Majoration/inégalité à connaître

Prop. 8

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|.$$

Démo. 8

II. Fonction tangente

1. Définition et étude de la fonction

On définit la fonction **tangente** par : $\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$.

On a donc $\boxed{D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[}$.

Prop. 9 La fonction tangente est dérivable en tout point de son domaine de définition :

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x$$

Démo. 9

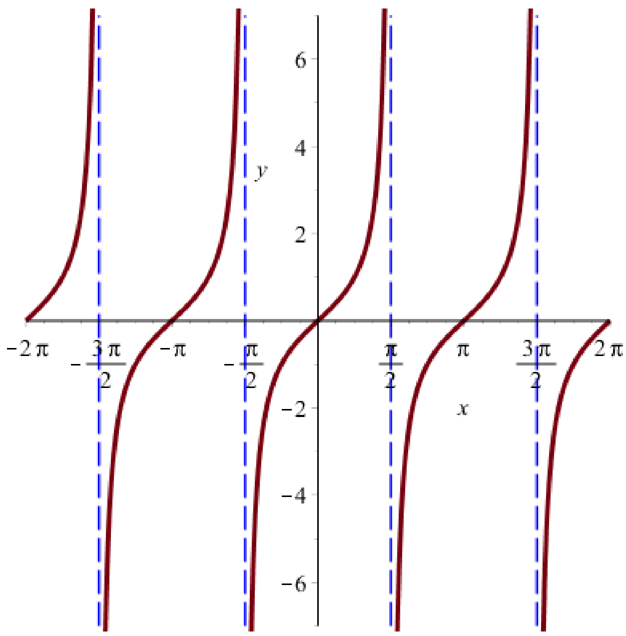


Figure 2 – Représentation graphique de la fonction tangente

Tangente des angles usuels : compléter et retenir !

$\tan(0) =$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) =$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) =$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$	$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$	$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$	$\tan(\pi) =$

2. Formules usuelles de trigonométrie

Prop. 10

- La fonction tangente est une fonction impaire :

$$\forall x \in D_{tan},\ \tan(-x) = -\tan(x).$$

- La fonction tangente est une fonction périodique, de période π :

$$\forall x \in D_{tan},\ \tan(x+\pi) = \tan(x).$$

- $\forall x \in D_{tan},\ \tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

Démo. 10

Prop. 11

Les formules énoncées sont valables pour toutes valeurs a et b de D_{tan} vérifiant $a+b \in D_{tan}$ ou $2a \in D_{tan}$:

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Démo. 11

3. Transformations d'écriture à l'aide de l'angle moitié

Principe : on transforme des expressions en $\cos(x)$, $sin(x)$ ou $\tan(x)$ en faisant apparaître la quantité $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, sous réserve que cette quantité soit définie.

Prop. 12

On note $t = \tan \dfrac{x}{2}$. On a :

- $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,
- $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$,
- $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

lorsque ces grandeurs sont définies.

Démo. 12 - Démonstration exigible (cf Programme).

III. Exemples de résolution d'équations ou d'inéquations trigonométriques

1. Rappels sur les congruences

Def. 2 Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On dit que x et y sont **congrus modulo** a si et seulement si il existe $k \in Z$ tel que :

$$x - y = k\,a \iff x = y + k\,a.$$

Dans ce cas, on note : $x \equiv y\,[a]$ ou $x = y\,[a]$.

Conséquences calculatoires :

- On peut additionner deux congruences de même module :

$$\begin{cases} x \equiv y\,[a] \\ x' \equiv y'\,[a] \end{cases} \implies x + x' \equiv y + y'\,[a].$$

- Cas des multiplications : effet sur le module :

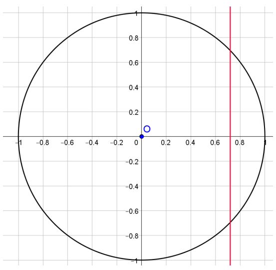
$$\begin{cases} x \equiv y\,[a] \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \implies \lambda x \equiv \lambda y\,[\lambda a].$$

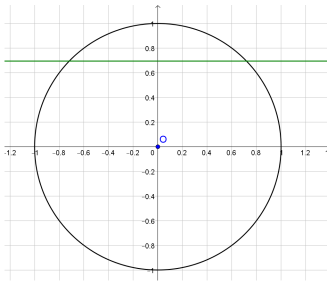
2. Utilisation du cercle trigonométrique

Prop. 13 Soit x, y deux réels, on a les propriétés :

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y\,[2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y\,[2\pi] \end{cases}$$

Démo. 13 - Version rapide avec le cercle trigonométrique, à savoir refaire rapidement.





Ex.1

- Résoudre $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$.
- Résoudre $|\sin(x)| < \frac{1}{2}$.
- Résoudre $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$.
- Résoudre $2\cos x \geq \sqrt{3}$.

Ex.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin^4 x - \frac{5}{2}\sin^2 x + 1 = 0$.

Ex.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$.