TD02 - Fonctions trigonométriques : compléments

I. Manipulation des formules usuelles

Ex.1 : Utilisation de la propriété $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Simplifier les expressions suivantes :

1) $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$.
2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$.
3) $\dfrac{1}{1-\sin A} + \dfrac{1}{1+\sin A}$.
4) $\tan^2 x\cos^2 x + \dfrac{\sin^2 x}{\tan^2 x}$.
5) $\sin x\cos x\left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)$.

Ex.2 : Calcul de fonctions trigonométriques en connaissant l'une d'entre elles

1) Calculer $\sin\theta$, sachant que $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ et que $\tan\theta \geq 0$.
2) Calculer les valeurs de $\cos x$ et $\tan x$, sachant que x est un angle du premier quadrant et que $\sin x = \dfrac{8}{17}$.
3) Calculer $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $\tan x = -\dfrac{5}{12}$.

Ex.3 : Formules d'addition

1) Calculer les valeurs de $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ sachant que :
$$\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos(\beta) = \frac{5}{13},\ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$
2) Calculer les valeurs de $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ sachant que :
$$\sin\alpha = \frac{1}{3},\ \cos(\beta) = \frac{2}{5},\ \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi],\ \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$
3) En utilisant la relation $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

Ex.4 : Calculer la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

II. Sommes et produits trigonométriques

Ex.5 : Écrire $S = \cos x + 2\cos(2x) + \cos(3x)$ sous la forme d'un produit.

Ex.6 : Simplifier la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\big((2k-1)\theta\big)$.

Ex.7 : Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall h \in]0,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos((a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$.

Ex.8 : Montrer que $P = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(5\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{8}$.
Indication : calculer $Q = P \times \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$ et utiliser plusieurs fois la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Ex.9 : Montrer que $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x} = 2\cos x$.

Ex.10 : Une formule de Viète

1) Soit $x \in]0,\pi[$. En utilisant la formule $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$, simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \qquad (n\,\text{radicaux}).$$

et

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

4) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2^n} = \frac{2}{\pi}$.

Ex.11 : Variante de la formule de Viète

1) Soit $y \in \mathbb{R}$ non multiple entier de π. Exprimer en fonction de $\cos(2y)$ la quantité $\dfrac{\sin(3y)}{\sin(y)}$.

2) Soit $x \in]0,\pi[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}.$$

Donner une expression simplifiée de u_n puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

III. Equations/inéquations trigonométriques

Ex.12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$a)\ \sin(x) = \frac{1}{2}, \qquad b)\ \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ex.13 : Déterminer les réels x de $[0,2\pi[$, tels que : $\cos(x) \geq \sin(x)$.

Ex.14 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geq 0$.

2) Pour quelles valeurs de x cette inégalité est-elle une égalité ?

Ex.15 : Résoudre $\cos(x)+\sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ex.16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin(x)+\sin(2x)=0$.

Ex.17 : Soient $a, b, c, d \in [0, \pi]$.

1) Montrer que : $\sin a+\sin b \leq 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

2) En déduire que : $\sin a+\sin b+\sin c+\sin d \leq 4\sin\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)$.

3) En déduire que $\sin a+\sin b+\sin c \leq 3\sin\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$.

Ex.18 : Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $a+b \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $\sin^2 a+\sin^2 b \leq \sin^2(a+b)$. Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

Ex.19 : 1) Déterminer le maximum de $\sin^2(x)\sin(2x)$ sur $[0, \pi]$.

2) En déduire l'inégalité :

$$\left|\prod_{k=0}^{n}\sin(2^k x)\right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$