L16 - Calcul matriciel et systèmes linéaires

Plan

I. Ensembles $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. Définitions

Def. 1 Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$.
On appelle **matrice à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$** tout tableau :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ ou $A = (a_{i,j})$.

Le coefficient d'indice (i, j) d'une matrice A peut être noté $[A]_{i,j}$.

Dans cette écriture :

- $L_i = (a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,p}) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est la $i-$ème ligne de la matrice.
- $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \cdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la $j-$ème colonne de la matrice.

Exemple 1 : $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, avec : $a_{1,1} = 5$ $a_{1,2} = 3$ $a_{2,1} = 0$ $a_{2,2} = 7$ $a_{3,1} = 4$ $a_{3,2} = 1$

Les lignes de A sont : $L1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$, $L2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}$ et $L3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Les colonnes de A sont : $C1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $C2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Def. 2 On appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matrice est dite réelle, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice est dite complexe.

Matrice nulle : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j} = 0$, soit $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Matrice ligne : $n = 1$. On peut identifier une matrice ligne $(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_p)$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ avec le $p-$uplet correspondant $(a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

Matrice colonne : $p = 1$. On peut identifier une matrice colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec le $n-$uplet correspondant $(a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$, en identifiant écriture en ligne et écriture verticale.

2. Addition et produit par un scalaire

Def. 3 **Somme de matrices, multiplication par un scalaire**

Soient $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle **somme** de A et B, et on note $A+B$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\,\forall j\in[\![1,p]\!],\,[A+B]_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}.$$

- L'opération $\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\\ (A,B) & \longmapsto & A+B\end{array}$ s'appelle **addition de matrices** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, on désigne par λA la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\,\forall j\in[\![1,p]\!],\,[\lambda.A]_{i,j}=\lambda a_{i,j}.$$

- L'opération $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\\ (\lambda,A) & \longmapsto & \lambda A\end{array}$ s'appelle **produit d'une matrice par un élément de** $\mathbb{K}$ ou encore **produit d'une matrice par un scalaire**.

Comme pour le calcul dans $\mathbb{R}^n$, on effectue les opérations **coordonnée par coordonnée**.

Exemple 2 :
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2+i & 3\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1+i & 1\\ 1-i & 2+i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2+i & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}i-1 & i\\ i+1 & 2i-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & -1+i\\ 2i+3 & 2+2i\end{pmatrix}.$$

Propriétés calculatoires : $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ a une structure de **groupe abélien** :
- $\forall A,\,B,\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad A+B=B+A$;
- $\forall A,\,B,\,C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad (A+B)+C=A+(B+C)$;
- La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, aussi notée 0, est l'**élément neutre** pour l'addition :

$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad A+0=0+A=A;$$

- Pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $-A=(-1)A$ est l'**opposée de** Apour l'addition, et vérifie :

$$A+(-A)=(-A)+A=0.$$

La multiplication d'une matrice par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad 1.A=A$
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall(A,\,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ et $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

Prop. 1 L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est stable par combinaison linéaire :

$$\forall A,\,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\,\forall(\lambda,\,\mu)\in\mathbb{K}^2,\,\lambda A+\mu B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Démo. 1

3. Matrices élémentaires

Def. 4 Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ on définit la **matrice élémentaire** E_{ij} telle que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [E_{i,j}]_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

Remarque : toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}.$$

Exemple 3 : $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 5.E_{1,1} + 3.E_{1,2} + 7.E_{2,2} + 4.E_{3,1} + 1.E_{3,2}$.

En termes d'espaces vectoriels on reconnait :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\Big((E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \Big).$$

4. Produit matriciel

Def. 5 **Produit de matrices**

Soient $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On appelle **produit des matrices A et B** la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Le produit n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple 4 : $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$.

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Calculer AB et BA.

Visualisation :

Exemple 5 Calculer AB pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Ex. 1 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 - 3M + 2I_2 \end{array}$.

Calculer $f(A)$.

Prop. 2 Soient A, B, C trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si les produits matriciels sont possibles on a :

• **Bilinéarité du produit matriciel** :

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda(AB) + \mu(AC) \qquad (\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$$

• **Produit matriciel et produit par un scalaire** :

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

• **Associativité du produit matriciel** :

$$A(BC) = (AB)C$$

Démo. 2

Remarques :

1) Si $n \neq p$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On a forcément $AB \neq BA$.

2) Si $n = p$ on n'a pas forcément $AB = BA$.
Exemple 6 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer AB et BA.

3) Il existe des matrices non nulles **dont le produit est nul**.

Exemple 7 - Calculer $J \times J$ pour $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4) L'addition de matrices est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ mais le produit n'est pas une loi sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sauf si $n = p$.

Prop. 3 **Produit de matrices élémentaires**

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \forall (k,\ell) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],\ E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$$

Démo. 3

5. Produit et combinaisons linéaires de lignes et de colonnes

Def. 6 - Prop. 4

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

En appelant $C_1, \cdots, C_p$ les colonnes de A, on peut écrire :

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{bmatrix}$$

Le produit matriciel AX s'exprime alors comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

Démo. 4

Prop. 5

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, on a :

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX) \iff A = B$$

Démo. 5

Applications :

- On va pouvoir traduire les systèmes linéaires à l'aide de produits matriciels, en les écrivant sous la forme $AX = B$ où A est la matrice associée au système homogène, X le vecteur des inconnues et B le vecteur du second membre.
  cf III. de cette leçon.
- Traduction de produits scalaires :

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx' + yy' + zz' \end{bmatrix} \underset{\text{convention}}{=} xx' + yy' + zz'$$

6. Transposition

Def. 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **transposée** de A, et on note A^T la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ [A^T]_{i,j} = [A]_{j,i} \qquad \big(\text{autre formulation : } a_{ij} = a_{ji}\big)$$

Exemple 8 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Prop. 6

Propriétés calculatoires :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (A,\, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \quad (\lambda A + \mu B)^T = \lambda\, A^T + \mu\, B^T$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A^T)^T = A$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (AB)^T = B^T\, A^T$

Démo. 6

Ex. 2

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le produit AB.

2) Former les matrices $A' = A^T$ et $B' = B^T$, puis calculer $B'A'$.

II. Opérations élémentaires et calcul matriciel

1. Traduction des opérations élémentaires par des produit matriciel

Def. 8 On appelle **opération élémentaire** sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

- addition d'un multiple d'une ligne (resp. d'une colonne) à une autre ligne (resp. une autre colonne), appelée **transvection**.
  Notée symboliquement $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$, avec $i \neq j$;

- multiplication d'une ligne (resp. d'une colonne) par un **scalaire non nul**, appelée **dilatation**.
  Notée symboliquement $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$, avec $\alpha \neq 0$;

- échange de deux lignes (resp. de deux colonnes), appelée **échange** ou **permutation**.
  Notée symboliquement $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Def. 9 **Matrices d'opérations élémentaires**

- On appelle **matrice de transvection** toute matrice de la forme :

$$T_{i,j,\alpha} = I_n + \alpha E_{ij} \quad \text{avec}\, i \neq j \,\text{et}\, \alpha \in \mathbb{K}.$$

- On appelle **matrice de dilatation** toute matrice de la forme :

$$D_{i,\alpha} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii} \quad \text{avec} \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

- On appelle **matrice de permutation** toute matrice de la forme :

$$P_{i,j} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} \quad \text{avec}\, i \neq j.$$

Prop. 7 Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, effectuer une opération élémentaire sur les lignes de M revient à **multiplier à gauche** M par la matrice d'opération élémentaire correspondante (qui est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $M' = D_{i,\alpha}M$ se déduit de M par la dilatation : $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- $M' = T_{i,j,\alpha}M$ se déduit de M par la transvection : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.
- $M' = P_{i,j}M$ se déduit de M par la permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Démo. 7

Prop. 8 Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que l'on passe de M à M' par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Si ces opérations sont successivement associées aux multiplications par les matrices élémentaires E_1, E_2, $\cdots$, E_s, alors on a :

$$M' = (E_s \cdots E_2\, E_1)M$$

Démo. 8

2. Opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, les opérations élémentaires sur les colonnes de M correspondent à des produits matriciels *à droite* par des matrices de dilatation, de transvection ou de transposition (toutes appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$) :

- $M'' = MD_{j,\alpha}$ se déduit de M par la dilatation : $C_j \leftarrow \alpha C_j$.
- $M'' = MT_{i,j\alpha}$ se déduit de M par la transvection : $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$.
- $M'' = MP_{i,j}$ se déduit de M par l'échange : $C_i \longleftrightarrow C_j$.

III. Calcul matriciel et résolution de systèmes

1. Ecriture matricielle d'un système linéaire

On appelle système linéaire à n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système d'équations de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$

avec $(a_{i,j})$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$,et $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.

- Les coefficients scalaires $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients du système**.
- Les coefficients $b_1, \cdots, b_n$ sont les **seconds membres** du système.
- L'élément $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est le $p-$uplet des **inconnues du système**.
  On dit que $(x_1, \cdots, x_p)$ est une **solution du système** si les valeurs $x_1, \cdots, x_p$ vérifient les n équations de (S).

- Un système (S) est **carré** si $n = p$, il a autant d'équations que d'inconnues.

Le système (S) s'écrit aussi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = bi.$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La $p-$liste $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si $AX = B$.

Def. 10

- Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système est **homogène**, ou encore qu'il est "**sans second membre**".

- A un système (S) donné, on associe un système homogène (H) obtenu en annulant les seconds membres.

Def. 11 - Prop. 9

Un système d'équations (S) est dit **compatible** s'il admet **au-moins** une solution. Sinon on dit qu'il est **incompatible**.
Tout système homogène est compatible car il admet au-moins comme solution la p-liste $(0, \cdots, 0)$, aussi appelée **solution triviale**.

Démo. 9 - évident.

Prop. 10

Soit un système (S) représenté matriciellement par $AX = B$.

Si B est une combinaison linéaire des colonnes de A alors le système (S) est compatible.

Démo. 10

2. Structure de l'ensemble des solutions

Prop. 11

Soit un système (S) de représentation matricielle $AX = B$ **compatible**.

Les solutions de (S) sont les $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière de (S) et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé $AX = 0$.

En notant $\mathcal{S}$, respectivement $\mathcal{S}_H$, l'ensemble des solutions du système (S), resp. du système (H), on a :

$$\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_H = \{X_0 + Y \text{ , } Y \in \mathcal{S}_H\}.$$

Démo. 11

3. Algorithme du pivot de Gauss

Prop. 12 Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire le transforme en un système linéaire qui lui est équivalent.

Démo. 12 - ADMIS

Principes de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution d'un système d'équations linéaires

- Etape 1 : on transforme (S) en un système échelonné par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
- Etape 2 : on résout le système obtenu par remontée. On part de la dernière ligne et n réinjecte une solution à chaque ligne précédente.

IV. Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Structure d'anneau non commutatif

Matrice carrée : $n = p$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées **d'ordre** n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'addition est une loi de composition interne de tout ensemble de matrices, donc de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit matriciel est une seconde loi de composition interne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Def. 12 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **matrice identité d'ordre** n ou **matrice identité**, et l'on note I_n, la matrice :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $[I_n]_{i,i} = 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Longrightarrow [I_n]_{i,j} = 0$.

Exemple 9

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prop. 13 **Multiplication de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

- La multiplication de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une opération interne :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- La matrice I_n est le neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AI_n = I_nA = A$$

Démo. 13

On note $\times$ le produit matriciel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop. 14 $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Démo. 14

Remarques :

- L'application $\mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\big(a\big) \mapsto a$, est un isomorphisme d'anneaux. Dans la pratique on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

- Pour $n \geq 2$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif.
  Exemple 10 $E_{1,2}E_{2,2} = E_{1,2}$ et $E_{2,2}E_{1,2} = 0$.

Les propriétés de calcul établies pour un anneau quelconque sont encore vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Formule du binôme
Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $AB = BA$, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Factorisation de $A^p - B^p$
Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $AB = BA$, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}.$$

• Puissances d'une matrice

Def. 13 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** si et seulement si

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = 0.$$

Par convention $A^0 = I_n$.

Exemple 11 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $A^2 = 0$.
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $B^3 = 0$.

Ex. 3 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En écrivant $M = I_4 + J$, calculer M^n pour $n \geq 3$.

2. Matrices particulières

Def. 14 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- **diagonale** si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **scalaire** si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Vocabulaire : dans le cas d'une matrice carrée, les coefficients a_{ii} sont appelés **coefficients diagonaux**.
Ils forment la **diagonale principale** de A.
Si $i > j$, les coefficients a_{ij} sont en-dessous de la diagonale.
Si $i < j$, les coefficients a_{ij} sont au-dessus de la diagonale.

Def. 15 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- **triangulaire supérieure** si et seulement si :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **triangulaire inférieure** si et seulement si :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Notations : on note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a : $\boxed{\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).}$

Prop. 15 **Produit de matrices triangulaires/diagonales** :

Soient A et B deux matrices **triangulaires supérieures** (respectivement triangulaires inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :
- Leur produit $C = AB$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure).
- Les coefficients diagonaux vérifient : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

Soient A et B deux matrices **diagonales** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :
- Leur produit $C = AB$ est une matrice diagonale.
- Les coefficients diagonaux vérifient : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

Démo. 15

Prop. 16 Les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaire et stables par produit.

Démo. 16

Remarque :

Les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Def. 16 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :
- **symétrique** si et seulement si $A^T = A$, soit $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$
- **antisymétrique** si et seulement si $A^T = -A$,
  soit $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$

Notations :
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop. 17 Si A est symétrique, alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, A^k est symétrique.

Si A est antisymétrique, alors :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, A^{2k} est symétrique, A^{2k+1} est antisymétrique.

Démo. 17

Ex. 4 Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique couple $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $M = A + B$.

3. Matrices inversibles

Def. 17 - Prop. 18 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Si A est inversible alors B est unique, et appelée **matrice inverse** de A, et notée A^{-1}.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
C'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démo. 18

Prop. 19 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible : $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démo. 19

Prop. 20 Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démo. 20

Prop. 21 Si A est inversible alors A^T est inversible et on a :

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Démo. 21

Prop. 22 Si A est inversible et symétrique, alors A^{-1} est symétrique.
Si A est inversible et antisymétrique, alors A^{-1} est antisymétrique.

Démo. 22

Ex. 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

2) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

4. Inverses des matrices et systèmes linéaires

Prop. 23 Les matrices d'opérations élémentaires sont des matrices inversibles.

Démo. 23

Corollaire : Les opérations élémentaires conservent le caractère inversible.

Prop. 24 **Conditions d'inversibilité d'une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A est inversible.

(ii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système d'équations $AX = Y$ admet une solution unique.

(iii) Le système AX=0 n'admet que la solution nulle.

Démo. 24

Caractérisation d'une matrice inversible : quelques propriétés plus simples à vérifier

Prop. 25 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}(i) \quad A\,\text{inversible} &\iff (ii) \quad \exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times A' = I_n \\ &\iff (iii)\, \exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A' \times A = I_n\end{aligned}$$

Si (ii) ou (iii) est vérifié, alors $A' = A^{-1}$.

Démo. 25

Prop. 26 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

A est inversible $\iff$ Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système d'équations $AX = Y$ admet **au moins** une solution.

Démo. 26

Prop. 27 **Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de système**

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible, et $B = A^{-1}$.

(ii) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$, $Y = AX \iff X = BY$.

(iii) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, $Y = AX \implies X = BY$.

(iv) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, $X = BY \implies Y = AX$.

Démo. 27

5. Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice

1) Pour calculer l'inverse d'une matrice A, il suffit de résoudre $AX = Y$ où : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, en exprimant les composantes x_i en fonction des y_i. On lit les coefficients de A^{-1} dans chaque ligne de la solution unique.

C'est une méthode très utilisée dans les exercices de **changement de bases** en algèbre linéaire.

Exemple 12 : calcul de l'inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Méthode du pivot de Gauss ou algorithme de Gauss-Jordan : si par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes on peut passer de A à I_n, alors la même suite d'opérations permet de passer de I_n à A^{-1}.
On présente les transformations successives sous forme de tableaux de 2 matrices : on part de A et I_n, on arrive à I_n et A^{-1}.

Exemple 13 : déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Prop. 28 Une matrice triangulaire A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Alors son inverse est triangulaire (de même type inférieur/supérieur), et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

Démo. 28